

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВЫСОТНЫХ ПРОФИЛЕЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ, ДАВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ АТМОСФЕРЫ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ

ГАЙКОВИЧ К. П., СУМИН М. И.

Исследованы физические и математические аспекты постановки и решения обратной задачи астрономической рефракции — восстановления профилей показателя преломления, давления и температуры по измерениям оптической рефракции с поверхности земли на положительных углах места. Для решения использованы методы решения некорректных задач: а) метод, основанный на принадлежности точного решения к компактному классу монотонных функций, б) метод статистической регуляризации. Выполнен анализ информативного диапазона углов и требований к точности измерений. Путем численного моделирования рефрактометрического эксперимента и статистического анализа его результатов для ансамблей метеоданных получены оценки точности восстановления высотных профилей параметров атмосферы в зависимости от погрешностей измерений. Показана возможность восстановления сложных профилей с инверсиями температуры.

Введение. В настоящее время большое внимание привлекают возможности дистанционного определения параметров атмосферы по измерениям рефракции как в оптическом, так и в радиодиапазоне. Рефрактометрические методы были с успехом использованы при радиопросвечивании планет Солнечной системы [1, 2]. В нашей стране впервые был выполнен цикл работ по восстановлению слоистой структуры атмосферы Земли по данным измерений оптической рефракции космических источников с ОС «Салют-6» [3, 4], а также разработана методика и выполнены эксперименты по восстановлению стратификации атмосферы при внутриатмосферных измерениях рефракции [5, 6].

Высокая точность восстановления показателя преломления и метеопараметров, а также хорошее разрешение по высоте, достигнутые в перечисленных экспериментах, обусловлены в первую очередь геометрией наблюдений, главной особенностью которой является использование измерений при отрицательных углах места; т. е. на просвет. При этом выражение для соответствующей обратной задачи имеет вид уравнения Абеля, так что выделенным оказывается вклад слоя, соответствующего по высоте перигею луча. Эта задача является математически корректной, и высотное распределение показателя преломления восстанавливается из измерений рефракции с помощью обратного преобразования Абеля.

Качественно другая ситуация возникает при попытке использовать для восстановления профиля показателя преломления измерения астрономической рефракции, т. е. наземные измерения рефракции под положительными углами места, как это предлагается, например, в [7]. Геометрия задачи представлена на рис. 1. Известно [5], что в этом случае задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма I рода. Интегрируя по частям выражение для угла рефракции

$$\varepsilon(x) = -x \int_{p_0}^{\infty} \frac{d \ln n}{dp} \frac{dp}{\sqrt{p^2 - x^2}}, \quad p = nr, \quad x = n_0 r_0 \cos \theta \quad (1)$$

($n_0 = n(r_0)$)—приземное значение показателя преломления n ; $p_0 = n_0 r_0$, имеем исходное уравнение

$$\int_{p_0}^{p_H} N(p) \frac{px}{(p^2 - x^2)^{3/2}} dp = \tilde{\varepsilon}(x), \quad (2)$$

где $N = 10^6(n-1)$ —индекс рефракции,

$$\tilde{\varepsilon}(x) = -10^6 \varepsilon(x) + x \left(\frac{N(p_0)}{\sqrt{p_0^2 - x^2}} - \frac{N(p_H)}{\sqrt{p_H^2 - x^2}} \right) \quad (3)$$

— модифицированная правая часть, ($p_H = n(r_H)r_H$, где $r_H = r_0 + H$). Высота H выбирается достаточно большой, так что вклад интеграла от p_H

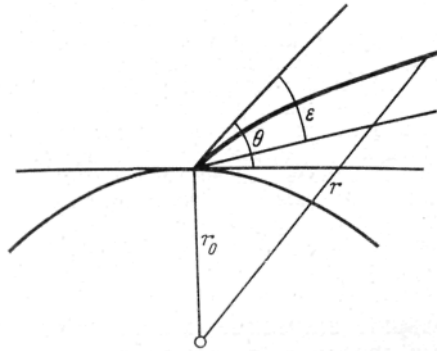


Рис. 1. Геометрия задачи

до ∞ можно оценить из модельных расчетов не хуже погрешности измерений рефракции.

Уравнение (2) является линейным интегральным уравнением Фредгольма I рода относительно распределения $N(p)$ и представляет собой классический пример некорректно поставленной задачи. Для численного решения уравнения (2) с непрерывным по совокупности (x, p) в прямоугольнике $\{x_1 \leq x \leq x_2, p_0 \leq p \leq p_H\}$ ядром $K(x, p) = px(p^2 - x^2)^{-1/2}$ необходимо привлекать дополнительную априорную информацию. Последняя поставля-

ется нам спецификой конкретной обратной задачи и может иметь различный характер. Она может заключаться в априорном знании о принадлежности искомого решения к тому или иному компактному классу функций, о мере гладкости решения, о мере гладкости его производных и т. п. Без знания такой априорной информации численное решение уравнения (2) представляет собой, вообще говоря, неразрешимую задачу. Поэтому любые попытки решения уравнения (2) без привлечения достаточно существенной априорной информации даже при наличии разного рода явных представлений для решения, сглаживании правой части либо ограничения ее спектра Фурье [7, 8] не имеют смысла (подробнее см. в [9, 10]).

Цель настоящей работы — выяснение реальных возможностей восстановления стратификации атмосферы по измерениям астрономической рефракции, а также определение требований к измерениям, в первую очередь к уровню точности и выбору информативного диапазона углов измерения¹. Исследованные в работе алгоритмы восстановления основаны на общепризнанных методах решения такого рода задач — методе решения некорректных задач на компактных множествах [9, 11] и методе статистической регуляризации [10].

¹ Результаты работы частично были доложены на Всесоюзном совещании по проблемам рефракции (Иркутск, 1984) [12].

Выбор диапазона углов измерений. Известно [13], что специфика распределения показателя преломления проявляется в заметных вариациях угла рефракции лишь на достаточно малых углах места. С ростом угла вариации уменьшаются, и рефракция со все возрастающей точностью определяется значением приземного показателя преломления, что составляет содержание теоремы Лапласа. Таким образом, диапазон углов, информативных для решения обратной задачи, ограничен сверху углами, на которых вариации рефракции становятся сравнимыми с погрешностями измерений. В таблице приведены результаты расчетов среднеклиматических значений оптической рефракции $\langle \varepsilon \rangle$, ее вариаций σ_ε (стандартное отклонение от $\langle \varepsilon \rangle$) и вариаций рефракции σ_{ε/N_0} при фиксированном значении N_0 , которые определялись как среднеквадратичное отклонение рефракции, рассчитанной по метеоданным (истинной), от рефракции, рассчитанной по профилю $N^3(h)$, полученному методом оптимальной экстраполяции от приземного значения показателя преломления N_0 согласно

$$N^3(h) = \langle N(h) \rangle + \frac{B_{NN}(0, h)}{\sigma_N^2(0)} (N_0 - \langle N_0 \rangle), \quad (4)$$

где B_{NN} — ковариационная межуровневая матрица, σ_N^2 — дисперсия.

Приведенные в таблице данные соответствуют ансамблю метеоданных (100 реализаций) для зимних условий ЕТ СССР.

θ	1"	1'	10'	30'	1°	2°	3°	4°	5°
$\langle \varepsilon \rangle$	41'	41'	38'	33'	27'	20'	15'	12'	10'
σ_ε	4'13"	4'06"	3'50"	3'18"	2'44"	1'59"	1'33"	1'15"	1'02"
σ_{ε/N_0}	43"	43"	37"	23"	12"	3,6"	1,6"	0,85"	0,51"

Для летнего ансамбля σ_ε оказалось примерно в 3 раза меньше, чем для зимнего, тогда как σ_{ε/N_0} почти совпадает с приведенными результатами.

Для того чтобы получить информацию о профиле с точностью, которая превышает точность оптимальной экстраполяции (4), необходимы измерения с ошибкой, меньшей σ_{ε/N_0} . При точности измерений $\delta\varepsilon = 1''$, которую можно считать в настоящее время предельной для измерений рефракции на низких углах места, диапазон информативных углов находится при $\theta < 4^\circ$, а при $\delta\varepsilon = 10''$ — соответственно при $\theta < 2^\circ$.

Со стороны малых углов места ограничения связаны с тем, что при $\theta \rightarrow 0$ весовая функция в (2) неограниченно возрастает и на достаточно малых углах места существенно меняется в интервале углов, сравнимом с погрешностью угловых измерений. Ясно, что минимальный угол должен быть много больше, чем ошибка угловых измерений в эксперименте.

Таким образом, ограничения на диапазон углов в данной задаче весьма существенны.

Решение обратной задачи рефракции на компактном множестве монотонных функций. Суть первого метода, примененного нами для решения уравнения (2), заключается в использовании такой специфической и существенной априорной информации, как принадлежность точного решения уравнения (2) к классу не возрастающих функций. В [14] А. Н. Тихоновым было впервые указано на возможность построения устойчивых приближений к решению некорректно поставленной задачи в случае, когда априори известно, что точное решение принадлежит некоторому компактному множеству.

Профиль $N(p)$ — невозрастающая функция², а множество $z\downarrow$, заданных на замкнутом отрезке $[a, b]$ невозрастающих функций, ограниченных сверху и снизу некоторыми постоянными $C_1, C_2, C_1 > C_2$ (эти постоянные одни и те же для всех функций множества), является компактным в $L_2[a, b]$ ³ (определение компактного множества функций см. в [9, с. 32]). Поэтому для решения обратной задачи оказывается возможным применить соответствующий алгоритм [11]. Этот алгоритм заключается в минимизации на множестве $z\downarrow$ невязки

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{p_0}^{PH} K(x, p) N(p) dp - \tilde{\varepsilon}_\delta(x) \right]^2 dx, \quad N(p) \in z\downarrow, \quad (5)$$

где $\tilde{\varepsilon}_\delta$ — измеренная реализация правой части (2). При этом процесс минимизации проводится лишь до уровня ошибки измерений правой части δ^2

$$\int_{x_1}^{x_2} [\varepsilon(x) - \tilde{\varepsilon}_\delta(x)]^2 dx \leq \delta^2$$

и в качестве приближенного решения уравнения берется любой элемент из $z\downarrow$, доставляющий невязке (5) значение, не большее, чем δ^2 (подробнее см. в [11]).

Такая задача минимизации — хорошо изученная с вычислительной точки зрения задача выпуклого программирования [15]. В данной работе мы применили для ее решения итерационный метод проекции сопряженных градиентов [15, с. 173], сходимость которого имеет место при любом начальном приближении из множества $z\downarrow$. Это означает, что в качестве первого приближения итерационного алгоритма может быть взята любая невозрастающая функция $N^0(p)$.

Численное моделирование решения обратной задачи выполнялось по замкнутой схеме. Правая часть (2), рассчитанная по исходному профилю $N(p)$, возмущалась нормально распределенной ошибкой со стандартным отклонением $\delta\varepsilon$, которая моделировала погрешность измерений. Полученные таким образом данные измерений использовались затем для восстановления показателя преломления из решения обратной задачи. Полученное распределение показателя преломления сравнивалось с исходным. При этом при помощи соотношения $p = nr = n(r_0 + h)$ профиль $N(p)$ преобразуется в высотный профиль $N(h)$. Расчеты выполнялись для измерений в оптическом диапазоне, где, зная $N(h)$, можно также восстановить высотные профили давления (P) и температуры (T), используя уравнения статики и состояния идеального газа (см. [3,4]).

Используя произвол в выборе начального приближения N^0 , о котором говорилось выше, мы исследовали различные варианты его выбора:

- а) $N^0(h) = 0$,
- б) $N^0(h) = N(0) \exp(-h/h_0)$, $h_0 = 9$ км,
- в) $N^0(h) = N^2(h)$ согласно (4).

В этих вариантах последовательно возрастает степень использования имеющейся априорной информации о профиле N . В первом случае она отсутствует, во втором используется приземное значение N_0 и модельные представления, в последнем используются также ковариационные межуровневые связи.

² Исключение составляют сравнительно редко встречающиеся случаи наличия в атмосфере волновода и миража, которые в оптическом диапазоне соответствуют весьма большим градиентам температуры (соответственно положительным и отрицательным).

³ $L_2[a, b]$ — пространство суммируемых с квадратом на $[a, b]$ функций.

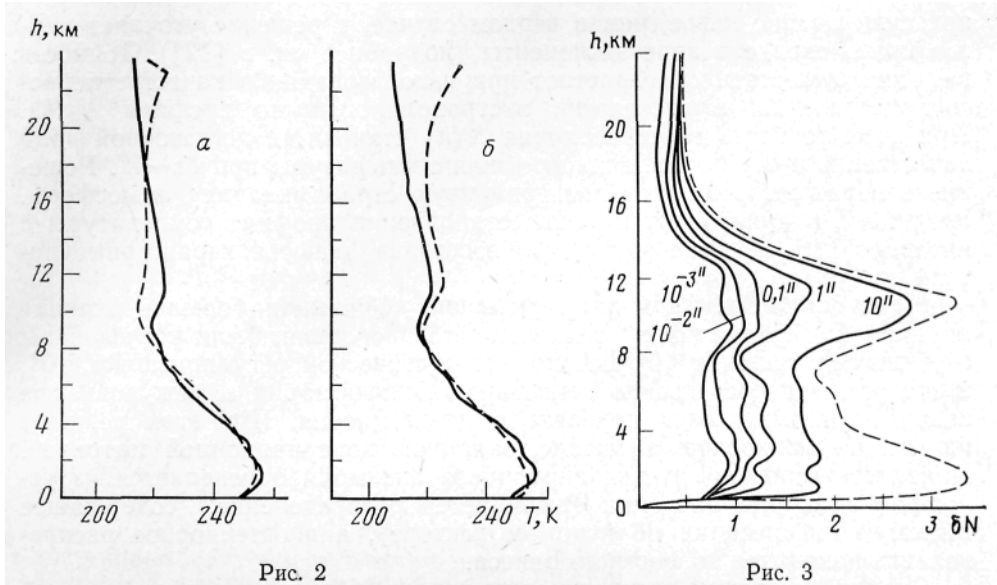


Рис. 2. Восстановление высотного профиля температуры из решения обратной задачи рефракции при $\delta\varepsilon=1''$: *a* — метод решения на множестве монотонных функций; *б* — метод статистической регуляризации

Рис. 3. Статистические оценки точности восстановления $N(h)$ из решения обратной задачи рефракции для различных погрешностей измерений (метод статистической регуляризации, зимний ансамбль метеоданных). Пунктир — значения $\delta N^{\text{э}} = \langle [N(h) - N^{\text{э}}(h)]^2 \rangle^{1/2}$

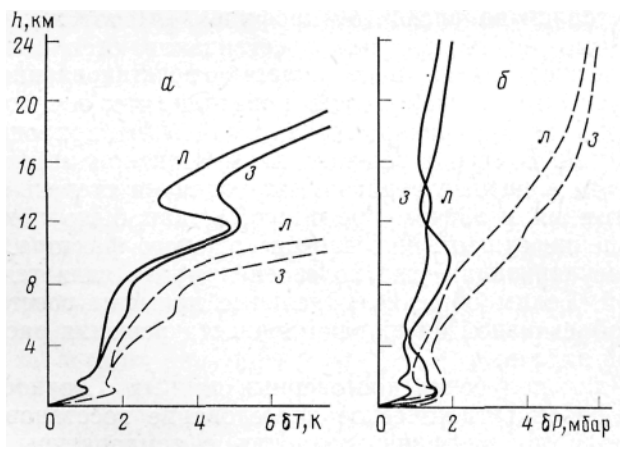


Рис. 4. Статистические оценки точности восстановления высотных профилей метеопараметров из решения обратной задачи рефракции: *a* — температуры, *б* — давления ($\delta\varepsilon=1''$ — сплошная, $\delta\varepsilon=10''$ — пунктир; *л* — для летнего ансамбля метеоданных, *з* — для зимнего)

Разным начальным приближениям соответствует различный вид исходного функционала невязки (5), а, следовательно, и различные «траектории» минимизации этого функционала. Так, оказалось, что при одинаковой погрешности правой части степень близости получаемого решения к точному профилю $N(h)$ для рассмотренных вариантов выбора $N^0(h)$ существенно неодинакова. В первом случае даже при погрешности правой части $\delta\varepsilon=10^{-4}''$ ошибки восстановления составляют 10—30% от величины N (хотя рефракция, рассчитанная по восстановленному профилю с точностью $10^{-4}''$, совпадает с рефракцией, рассчитанной по точному профилю). Во втором случае даже при $\delta\varepsilon\sim 10''$ качество реше-

ния существенно выше, чем в первом случае, и решение уточняет первое приближение в виде экспоненты (подробнее см. в [12]). Точность решения существенно возрастает при использовании в качестве первого приближения статистически экстраполированного профиля $N^3(h)$. При этом точность восстановления $N(h)$ становится достаточной для качественного восстановления профиля температуры при $\delta\varepsilon \sim 1$ ". Решение отображает реальную температурную стратификацию атмосферы. На рис. 2, а приведен пример восстановления профиля температуры с инверсией, на котором видно, что восстанавливаются характерные детали профиля.

Метод статистической регуляризации. Учитывая большое влияние априорной информации на точность восстановления, были исследованы особенности решения (2) методом статистической регуляризации [10], в котором непосредственно используется информация о межуровневых ковариационных связях показателя преломления. При этом решение ищется на априорном ансамбле, заданном ковариационной матрицей. Плотность вероятности для априорного ансамбля определяется из условия максимума энтропии (выбирается распределение, содержащее минимум информации об искомом векторе), а апостериорное распределение находится по формуле Байеса.

Средний по этому распределению вектор $N(p)$ при заданной правой части (2) определяет решение

$$N = \langle N \rangle + (K^*W^{-1}K + B_{NN}^{-1})^{-1}K^*W^{-1}(\tilde{\varepsilon} - \langle \tilde{\varepsilon} \rangle), \quad (6)$$

где K —матрица ядра, W — ковариационная матрица ошибок измерения. Пример восстановления профиля температуры из решения (6) для $\delta\varepsilon = 1$ " представлен на рис. 2, б (профиль $T(h)$ тот же, что и на рис. 2, а). Основные детали профиля восстанавливаются неплохо.

Статистический анализ погрешностей восстановления. Сравнение методов. Численные эксперименты показали, что точность восстановления различается для разных реализаций $N(h)$ при одинаковой точности измерений. В методе решения на компактном множестве это связано с тем, что в разных реализациях различна степень близости первого приближения к точному решению, а, как было показано выше, точность решения существенно зависит от этого фактора. Метод статистической регуляризации уже по своей природе является статистической оценкой. Таким образом, отдельные примеры восстановления не могут дать объективной оценки погрешности решения рассматриваемой некорректной задачи.

Поэтому для получения достоверных данных о точности восстановления выполнено статистическое исследование восстановления профилей показателя преломления, давления и температуры на больших ансамблях (~100 реализаций), соответствующих зимним и летним условиям Европейской части СССР. Полученные результаты позволили сопоставить исследованные методы решения обратной задачи и оценить их эффективность для практического использования.

Оказалось, что при реализуемых точностях измерений ($\Gamma_n \cdot 10^0$) метод статистической регуляризации дает более точные результаты, тогда как метод решения на компактном множестве дает несколько лучшие результаты при более высоких точностях. Результат естествен, поскольку этот метод в отличие от метода статистической регуляризации обладает гарантированной сходимостью при $\delta\varepsilon \rightarrow 0$. На рис. 3 представлены среднеквадратичные погрешности δN восстановления показателя преломления методом статистической регуляризации для различных значений $\delta\varepsilon$ по сравнению с точностью оптимальной экстраполяции $N(h)$ (для зимнего ансамбля реализаций). Видно, что измерения рефракции с погрешностью $\delta\varepsilon \leq 10$ " позволяют восстановить рас-

пределение $N(h)$ с точностью, заметно превышающей точность статистической оптимальной экстраполяции. Погрешности восстановления для летнего ансамбля несколько меньше. Медленная сходимость к точному решению при стремлении к нулю ошибок измерения характерна для некорректных задач рассматриваемого типа.

Число измерений рефракции в информативных диапазонах углов мало влияет на точность решения. Так, уменьшение числа углов наблюдения с 50 до 5 приводит к уменьшению точности восстановления лишь на 10—20%, что объясняется корреляцией рефракции на близких углах. При ограничении информативного диапазона углов сверху ухудшается точность восстановления в верхних слоях атмосферы, и наоборот, ограничение снизу приводит к ухудшению точности восстановления параметров нижних слоев атмосферы, что свидетельствует об определенной локализации информативных свойств углового распределения рефракции.

На рис. 4 представлены среднеквадратичные погрешности определения профилей температуры и давления по восстановленным профилям $N(h)$ для летнего и зимнего ансамблей при $\delta\varepsilon=1''$ и $\delta\varepsilon=10''$. Представленные результаты показывают, что при $\delta\varepsilon=1''$ температурный профиль восстанавливается с точностью 1—2 К до высоты 8 км, а профиль давления с точностью 1—2 мбар во всем интервале высот. При $\delta\varepsilon=10''$ точность восстановления температуры составляет меньше 2 К до высоты 4 км, а точность восстановления давления — меньше 2 мбар до высот 6—8 км.

Таким образом, при реализуемых точностях измерений рефракции высотные профили метеопараметров могут быть восстановлены из решения обратной задачи с точностью, сравнимой с лучшими теоретическими оценками возможностей восстановления метеопараметров методами наземной СВЧ-радиометрии [16] (полученными, кстати, с использованием тех же метеорологических ансамблей, что и в данной работе). Это показывает перспективность использования рассмотренного рефрактометрического метода в задачах наземного дистанционного зондирования атмосферы. Не исключено, что эти практически первые оценки точности метода могут быть улучшены. Отметим также, что в данном методе не существует проблем, связанных с неточным знанием ядра и нелинейностью интегрального уравнения, типичных для методов термического зондирования, что обеспечивает адекватность численного эксперимента реальным условиям.

Авторы, признательны А. С. Гурвичу и В. И. Татарскому за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kliore A. L., Gain D. L., Lery G. S., Eshelman V. R.* The Mariner-4 occultation experiment. — *Astronaut, and aeronaut*, 1965, № Т-7, p. 72—74.
2. *Fjeldbo G., Eshelman V. R.* The atmosphere of Venus as studied with the Mariner-5 dual radio frequency occultation experiment. — *Radio Sci.*, 1969, v. 4, № 10, p. 879—897.
3. *Гурвич А. С., Кап В., Попов Л. И., Рюмин В. В., Савченко С. А., Соколовский С. В.* Восстановление профиля температуры в атмосфере по кино съемке Солнца и Лупы с орбитальной станции «Салют-6». — *Изв. АН СССР. ФАО*, 1982, т. 18, № 1, с. 3—7.
4. *Гречко Г. М., Гурвич А. С., Обухов А. М., Попов Л. И., Рюмин В. В., Савченко С. А.* Использование рефрактометрической информации при зондировании атмосферы из космоса. — Препринт № 13 (Материалы семинара «Атмосфера — океан — космос», руководимого акад. Г. И. Марчуком). М.: ВИНТИ, 1981.
5. *Гайкович К. П., Гурвич А. С., Наумов А. П.* О восстановлении метеопараметров по внутриагмосферным измерениям рефракции космических источников. — *Изв. АН СССР. ФАО*, 1983, т. 19, № 7, с. 675—682.
6. *Бесчастнов С. П., Гречко Г. М., Гурвич А. С., Загоруйко С. В., Кон В., Финке В. В.* Структура температурного поля по наблюдениям рефракции с высотной метеорологической мачты. — *Изв. АН СССР. ФАО*, 1984, т. 20, № 4, с. 231—236.

7. Павельев А. Г. К решению обратной задачи рефракции.— Радиотехника и электроника, 1980, т. 25, № 12, с. 2504—2509.
8. Павельев А. Г. Анализ решения обратной задачи рефракции.— Радиотехника и электроника, 1984, т. 29, № 9, с. 1658—1667.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
10. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач.— УФН, 1970, т. 102, вып. 3, с. 345—386.
11. Тихонов А. Н., Гончарский, А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.
12. Гайкович К. П., Сумин М. И. К решению обратной задачи астрономической рефракции. Тез. докл. Всесоюз. научно-практического совещания по проблемам совершенствования аппаратурных средств и таблиц для определения рефракции электромагнитных волн в земной атмосфере. Иркутск: ТФ СО АН СССР, 1984, с. 37—38.
13. Колосов М. А., Шабельников А. В. Рефракция электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры и Марса. М.: Сов. радио, 1976. 219 с.
14. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач.— Докл. АН СССР, 1943, т. 39, № 5, с. 195—198.
15. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 320 с.
16. Gaikovich K. P., Markina N. N., Naumov A. P., Plechkov V. M., Sumin M. I. Investigation of remote sensing possibilities of the lower atmosphere in the microwave range and some aspects of statistical data use.— Int. J. Remote Sensing, 1983, v. 4, № 2, p. 419—431.

Горьковский научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию

14.11.19

85

•

**ON THE RETRIEVAL OF ATMOSPHERE REFRACTIVE INDEX,
PRESSURE AND TEMPERATURE VERTICAL PROFILES FROM
OBSERVATIONS OF ASTRONOMICAL REFRACTION**

GAIKOVICH K. P., SUMIN M. I.

Physical and mathematical aspects are studied for statement and solution of the inverse problem for positive elevation angles, i. e. the problem of the retrieval of refractive index, pressure and temperature vertical profiles using ground-based measurements of optical refraction. Two methods of the incorrect problem solution are used: a) method based on the assumption of the exact solution to belong to a compact set of monotonous functions; b) statistical regularization method. An analysis of informative angle intervals and measurement error level restrictions is performed. By the computer modeling of the refractometric experiment and its statistical analysis for meteorological data ensembles, the estimations of the error level for retrieved vertical profiles of atmospheric parameters are given depending on measurement errors.