

## **Двойственные алгоритмы в обратных задачах многочастотного подповерхностного зондирования**

<sup>1</sup>К.П. Гайкович, <sup>2</sup>Е.С. Максимович, <sup>3</sup>А.И. Смирнов, <sup>4</sup>М.И.Сумин

<sup>1</sup>*Институт физики микроструктур Российской академии наук, Нижний Новгород*

*E-mail: gai@ipm.sci-nnov.ru*

<sup>2</sup>*Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси, г. Минск, Беларусь*

*E-mail: takhel@iapf.bas-net.by*

<sup>3</sup>*Институт прикладной физики Российской академии наук, Нижний Новгород*

*E-mail: smirnov@appl.sci-nnov.ru*

<sup>4</sup>*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород*

*E-mail: m.sumin@mail.ru*

*Развит алгоритм решения задач многочастотного электромагнитного зондирования подповерхностных неоднородностей, основанный на новом в теории нелинейных некорректных обратных задач методе двойственной регуляризации. Алгоритм исследован применительно к задаче восстановления профиля проводимости земной коры по данным измерений в УНЧ-КНЧ диапазоне и к задаче восстановления профиля водосодержания по данным СВЧ мониторинга процесса диффузии воды в грунт. Спецификой постановки этих задач является Фурье-трансформация многочастотных измерений во временную область, что позволяет существенно уменьшить влияние погрешности данных. Приводятся результаты численного моделирования и первых экспериментов в СВЧ диапазоне.*

Необходимость решения одномерных обратных задач рассеяния возникает во многих методах электромагнитной и акустической диагностики одномерно неоднородных сред. Впервые такая задача была сформулирована и решалась А.Н.Тихоновым для магнитотеллурического зондирования земной коры со слоистой структурой глубинного профиля проводимости по данным многочастотных измерений электромагнитных полей искусственного и естественного происхождения на ультранизких частотах, способных проникать вглубь земной коры на несколько километров. Эта задача решалась самыми разными методами: параметризацией, статистическими и нейросетевыми методами, методом обобщенной невязки Тихонова, путем итерационного решения нелинейного интегрального уравнения. Однако трудности решения этой нелинейной некорректной задачи до сих пор нельзя считать преодоленными.

Данное обстоятельство стимулировало развитие новых подходов, которые позволили бы решать такие задачи, причем непосредственно в рамках их естественных дифференциальных постановок, к которым относится рассматриваемый в данной работе метод, основанный на теории двойственности [1,2]. Этот метод, развивающий классический в теории оптимизации лагранжев формализм, является устойчивым к ошибкам исходных данных и ориентирован на решение нелинейных задач. Отметим также, что характерной особенностью любого алгоритма, основанного на теории двойственности, является параллельное решение сразу двух задач – исходной и двойственной к ней. При этом процесс решения двойственной задачи, которая всегда является задачей выпуклой оптимизации (с точностью до знака целевой функции), приводит одновременно и к конструктивному построению приближений к решению исходной задачи.

Эффективность этого метода была продемонстрирована в численном моделировании электромагнитного многочастотного зондирования подповерхностных неоднородностей [1]. Вместе с тем, практическое применение разработанных алгоритмов ограничивалось погрешностью экспериментальных данных. Для решения этой проблемы в данной работе используется предложенный в [3] подход, основанный на трансформации результатов многочастотного зондирования во временные зависимости (в так называемый синтезированный псевдоимпульс), и разработанный на основе этого подхода двойственный алгоритм исследуется применительно к задачам УНЧ и СВЧ зондирования.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГЕОМАГНИТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ Для УНЧ-СНЧ диапазонов радиоволн на земной поверхности выполняются граничные условия Леонтовича, в силу чего можно считать волну распространяющейся вглубь по нормали к земной поверхности  $z = 0$ , а земную кору можно считать проводником с чисто мнимой комплексной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \approx i4\pi\sigma/\omega$ , которую определяет профиль проводимости  $\sigma = \sigma(z)$ . Для определенности будем считать, что поле имеет компоненты  $E_y, H_x$ , и в дальнейшем опускаем их индексы. В этом случае уравнения Максвелла предельно упрощаются:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + i \frac{4\pi\sigma(z)\omega}{c^2} E = 0, \quad H = -i \frac{c}{\omega} \frac{dE}{dz}, \quad z_n \leq z \leq 0, \quad (1)$$

где  $\omega$  – циклическая частота,  $c$  – скорость света. Измеряются электрические и магнитные поля на поверхности  $z = 0$ :

$$E(z = 0, \omega) = E_0(\omega), \quad H(z = 0, \omega) = H_0(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (2)$$

Чтобы исключить трудно контролируемые частотные вариации падающего поля, в геомагнитном зондировании в анализе обычно используется отношение полей (комплексный импеданс)  $Z_0(\omega) = E_0/H_0$ . По нему легко вычислить коэффициент отражения  $R_0(\omega) = (Z_0(\omega) - 1)/(Z_0(\omega) + 1)$ , и именно этот параметр мы будем использовать в последующем анализе. Тогда условие (2) сводится к

$$R[\sigma, \omega] = R_0(\omega). \quad (3)$$

Магнитотеллурические данные часто измеряются с существенными погрешностями, но для случая измерений на большом числе рядом лежащих частот влияние этих погрешностей можно существенно уменьшить, трансформируя их, как было предложено в [3], во временную область с помощью обратного преобразования Фурье:

$$R_0(t) = \int_{\omega} R_0(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (4)$$

При этом некоррелированная часть ошибки сдвигается в область больших значений  $t$ , вне области, где импульс формируется подповерхностной неоднородностью. Наконец, удобно заменить временной параметр на соответствующий пространственный параметр эффективной глубины рассеяния  $z_s = -tc/2 \operatorname{Re}(\sqrt{\varepsilon})$  (принимая во внимание скорость света в среде), и записать условие (3) для трансформированных данных:

$$R[\sigma](z_s) = R_0(z_s) \quad (5)$$

Для применения метода двойственной регуляризации в нелинейных случаях необходимо использовать модифицированную функцию Лагранжа со штрафными функциями:

$$L_{\mu}[\sigma](\lambda) = \|\sigma\|^2 + \int_{z_s} [\lambda_1(z_s)(\operatorname{Re} R[\sigma](z_s) - \operatorname{Re} R_0(z_s)) + \lambda_2(z_s)(\operatorname{Im} R[\sigma](z_s) - \operatorname{Im} R_0(z_s))] dz_s + \mu \left\{ \left( \int_{z_s} |R[\sigma](z_s) - R_0(z_s)|^2 dz_s \right)^{1/2} + \left( \int_{z_s} |R[\sigma](z_s) - R_0(z_s)|^2 dz_s \right) \right\} \quad (6)$$

где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\mu > 0$ . Роль параметра  $\mu$  состоит в том, что при его достаточно больших значениях модифицированная функция Лагранжа  $L_{\mu}[\sigma](\lambda)$  гарантированно достигает минимума. Однако этот минимум в общем случае не является единственным. Поэтому, согласно [2] параллельно исходной задаче минимизации решается регуляризованная по Тихонову двойственная задача, которая состоит в максимизации выпуклого функционала в гильбертовом пространстве:

$$V_{\mu}^{\alpha}[\sigma](\lambda) = \min_{\sigma \in D} L_{\mu}[\sigma](\lambda) - \alpha \|\lambda\| \rightarrow \max_{\|\lambda\| \leq \mu} \quad (7)$$

где максимум по множителям Лагранжа  $\lambda$  ищется на множестве  $\Lambda_{\mu} \equiv \{\lambda \in L_2^2(z_{s1}, z_{s2}) : \|\lambda\| \leq \mu\}$ . Седловая точка этого процесса минимизации по  $\sigma$  и максимизации по двойственной переменной  $\lambda$  дает искомое решение.

Алгоритм этого метода был исследован в численном моделировании по замкнутой схеме: по исходному профилю вычислялись точные значения коэффициента отражения на заданных частотах; путем набрасывания случайной ошибки формировались «данные измерений», далее, они трансформировались в синтезированный псевдоимпульс, решалась обратная задача, и результат решения сравнивался с исходным профилем. На рис.1 можно видеть пример

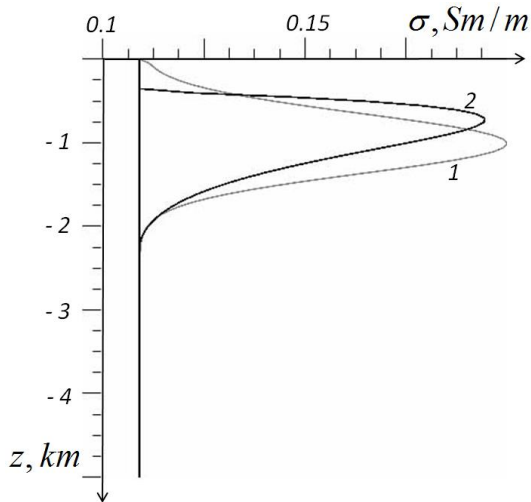


Рис.1. Глубинный профиль проводимости:  
1 – исходный; 2 – восстановленный

восстановления профиля проводимости по исходным данным, представленным на рис.2б (кривая 2), которые, в свою очередь были рассчитаны по коэффициенту отражения с весьма большими погрешностями данных (кривая 2 на рис.2а).

На рис.2 можно видеть, что уровень погрешности в трансформированном сигнале радикально сокращается, что критически важно для решения рассматриваемой некорректной задачи. Опыт моделирования показал, что двойственный метод позволяет успешно восстанавливать профили различной формы. В то же время, многообразие параметров среды и неоднородностей столь велико, что в каждой конкретной ситуации необходимо проводить специальные исследования путем численного моделирования.

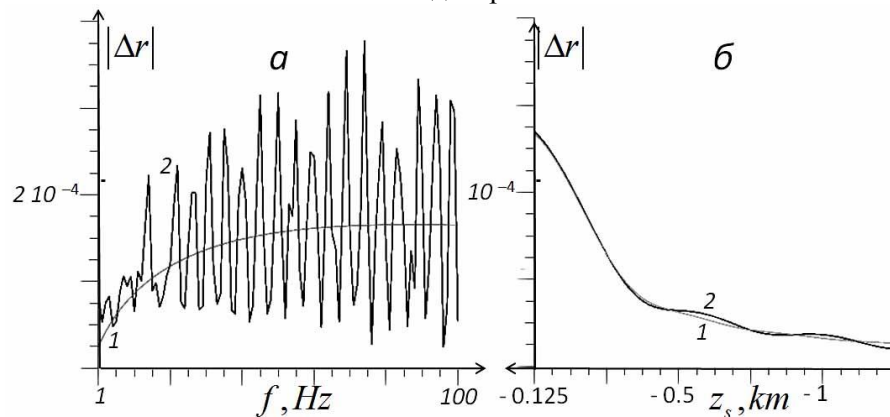


Рис.2. Амплитуда вариаций коэффициента отражения:

- а – исходные данные в зависимости от частоты (1 – точные данные; 2 – данные со случайной погрешностью);
- б – трансформированные данные в зависимости от параметра эффективной глубины рассеяния (1 – рассчитанные по точным данным на рис.2а; 2 – по данным с погрешностью)

**СВЧ МОНИТОРИНГ ДИФФУЗИИ ВОДЫ В ГРУНТ** Мотивация постановки этой задачи связана с необходимостью протестировать двойственный метод для решения задач электромагнитной томографии [3] за пределами применимости борновского приближения в более простом одномерном случае. Томография [3], т.е. восстановление трехмерного распределения  $\epsilon_1(\mathbf{r})$  среды с комплексной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon_0 + \epsilon_1(\mathbf{r})$ , основана на анализе комплексных амплитуд сигнала, измеряемого на 801 частоте в диапазоне 1,7 – 7,0 ГГц путем двумерного сканирования вдоль поверхности над неоднородностью. Измерительная система включала жестко связанную систему идентичных приемной и передающей широкополосных bow-tie антенн и векторный анализатор цепей Agilent E5071B. В анализе использовалось разложение поля по плоским волнам и аналогичная предыдущей задаче трансформация многочастотных данных во временную область.

Вариации принимаемого сигнала в точке привязки антенны определяются обратным фурье-преобразованием их поперечного спектра

$$s(x_r, y_r, \omega) = \iint s(\kappa_x, \kappa_y, \omega) \exp(i\kappa_x x_r + i\kappa_y y_r) d\kappa_x d\kappa_y. \quad (8)$$

Для плоских антенн сигнал представляет собой свертку рассеянного поля и аппаратной функции, поэтому для их спектров имеем

$$s(\kappa_x, \kappa_y, z_r) = 4\pi^2 \mathbf{E}_1(\kappa_x, \kappa_y, z_r) \mathbf{F}(\kappa_x, \kappa_y) \quad (9)$$

Рассеянное поле для каждой плоской волны в спектре определяется компонентами падающего поля и коэффициентами отражения на соответствующих поляризациях:

$$\mathbf{E}_1(\kappa_x, \kappa_y, z_r) = [R^{\parallel}(\kappa_x, \kappa_y) \mathbf{E}_0^{\parallel}(\kappa_x, \kappa_y, 0) + R^{\perp}(\kappa_x, \kappa_y) \mathbf{E}_0^{\perp}(\kappa_x, \kappa_y, 0)] \exp(\sqrt{k^2 - \kappa_x^2 - \kappa_y^2} z_r), \quad (10)$$

$k = \omega/c$ ,  $k_z = \sqrt{k^2 - \kappa_x^2 - \kappa_y^2}$ ,  $\kappa_{\perp} = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$ ,  $z_s, z_r$  – высоты передающей и приемной антенн. Падающее поле в  $k$ -пространстве определяется поперечным спектром компонент токов  $j_i(\kappa_x, \kappa_y, z_s)$  в излучающей антенне и соответствующей функцией Грина [4]. Это распределение представлено в [3]. Тогда, полагая выполненным условие взаимности  $F_i(\kappa_x, \kappa_y, z_s) = \text{const } j_i(\kappa_x, \kappa_y)$ , получаем выражение для сигнала, измеренного в момент  $t$  наблюдаемого процесса:

$$s(x_r, y_r, \omega, t) = -\text{const} \iint \frac{1}{2\pi\omega} \exp\left\{i(\kappa_x \delta x + i\kappa_y \delta y + \sqrt{k^2 - \kappa_x^2 - \kappa_y^2} (z_s + z_r))\right\} \times [R^{\parallel}[\varepsilon(z, \omega, t)](\kappa_x, \kappa_y) \left\{j_x^2 \frac{\kappa_x^2 k_z}{\kappa_{\perp}^2} + j_y^2 \frac{\kappa_y^2 k_z}{\kappa_{\perp}^2}\right\} + R^{\perp}[\varepsilon(z, \omega, t)](\kappa_x, \kappa_y) \left\{j_x^2 \frac{k^2 \kappa_y^2}{\kappa_{\perp}^2 k_z} + j_y^2 \frac{k^2 \kappa_x^2}{\kappa_{\perp}^2 k_z}\right\}] d\kappa_x d\kappa_y \quad (11)$$

Таким образом, прямая задача сводится к вычислению коэффициентов отражения одномерно неоднородной среды для плоских волн. Как и выше, мы используем в анализе трансформацию сигнала во временную область с заменой временной переменной на параметр эффективной глубины рассеяния  $s(z_s, t) = s(\tau = -2z_s \text{Re} \sqrt{\varepsilon_0}/c, t)$ . Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(z, \omega)$  частотно зависима, поэтому в данном случае задача решается относительно профиля объемного водосодержания песка  $f(z)$ , который определяет  $\varepsilon(z, \omega)$ . Для вычисления  $\varepsilon(z, \omega) = F[f(z)](\omega)$  мы использовали в анализе формулу [5]. Тогда, задача сводится к определению вариаций профиля  $f(z, t)$  по измеренным данным:

$$s[f](z_s, t) = s_0(z_s, t) \quad (12)$$

Модифицированная функция Лагранжа для этой задачи и функционал соответствующей двойственной задачи записываются полностью аналогично (6)- (7).

Оказалось, что даже одномерная задача оказалась чрезвычайно сложна с вычислительной точки зрения, и в алгоритме оказалось необходимо использовать распараллеливание для вычисления на многопроцессорном комплексе Нижегородского университета.

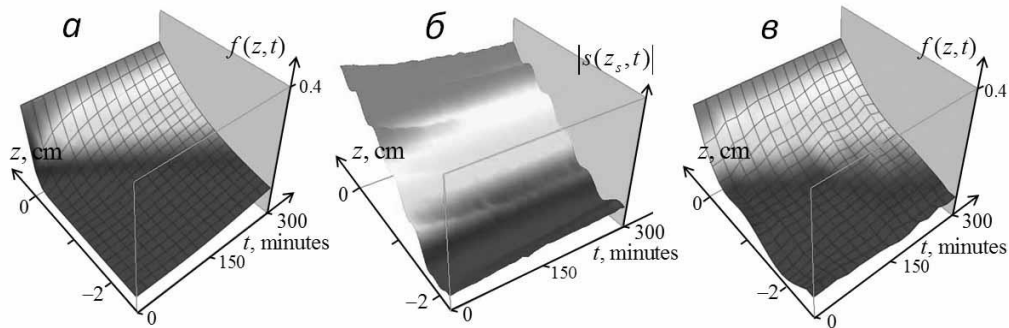


Рис.3. Численное моделирование СВЧ мониторинга диффузии воды в грунт: а) исходная динамика профиля водосодержания; б) «данные измерений»; в) восстановленная динамика профиля водосодержания

На рис.3а показана моделируемая динамика профиля водосодержания, на рис.3б – соответствующая динамика амплитуды трансформированного сигнала при уровне ошибки, соответствующем реальному эксперименту, а на рис.3в – результат решения обратной задачи по «данным» рис 3б.

В реальном эксперименте область анализа размерами  $50 \times 30 \times 20$  см<sup>3</sup> увлажнялась равномерно по поверхности (1 г/см<sup>2</sup>), и измерялась эволюция сигнала при положении антенной системы над центром увлажненной области. На рис.4а представлена эволюция амплитуды трансформированного сигнала (псевдоимпульса), а на рис.4б – результат восстановления динамики профиля водосодержания песка в процессе диффузии.

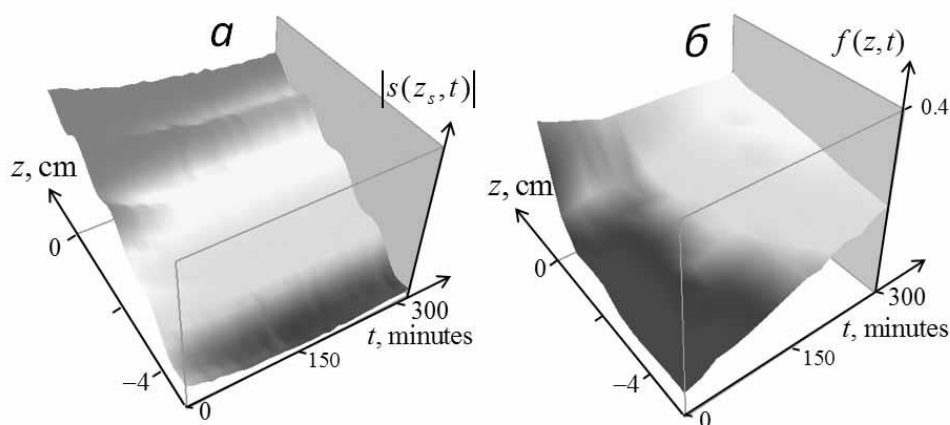


Рис.4. Результаты эксперимента:

а) трансформированные данные измерений;

в) восстановленная динамика профиля водосодержания

На рис.4 можно видеть, что процесс диффузии воды в песок хорошо наблюдается и в измерениях, и в результате восстановления по этим данным, что создает предпосылки для развития двойственного метода решения обратной задачи для более сложных трехмерных задач томографии подповерхностных диэлектрических неоднородностей, предложенной в [3]

Результаты получены при поддержке РФФИ (проекты №№ 12-02-90028-Бел, 13-07-97028\_р\_поволжье, 13-02-12155\_офи\_м, 12-01-00199), Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T12R-133), а также программы фундаментальных исследований ОФН РАН.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гайкович К.П., Гайкович П.К., Галкин О.Е., Смирнов А.И., Сумин М.И. Двойственная регуляризация в одномерных обратных задачах рассеяния. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, Н.Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2013, №1(1), с. 57-72.
2. Sumin M.I. Parametric dual regularization in a nonlinear mathematical programming // In *“Advances in Mathematics Research, Volume 11”*, Chapter 5, New-York: Nova Science Publishers Inc. 2010. pp.103-134.
3. Gaikovich K.P., Gaikovich, P.K., Maksimovitch Ye.S., Badeev V.A., ‘Pseudopulse near-field subsurface tomography’, *Physical Review Letters*, 2012, vol. 108, No. 16, pp. 163902.
4. Gaikovich K.P., Gaikovich P.K. Inverse problem of near-field scattering in multilayer media. *Inverse Problems*. 2010, v.26, No. 12, pp. 125013.
5. De Loor G.P. Dielectric properties of heterogeneous mixtures containing water, *Journal Microwave Power*, 1968, vol.3, pp. 67-73.