

УДК 621.371+537.87

К.П. ГАЙКОВИЧ

Институт физики микроструктур Российской академии наук,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород
E-mail: gaikovich@mail.ru

Обратные задачи низкочастотного зондирования земной коры

XXIX Симпозиум по радиолокационному зондированию природных сред

Развиты новые алгоритмы решения обратных задач диагностики неоднородностей проводимости земной коры по данным многочастотного зондирования в КНЧ-УНЧ диапазонах, основанные на последовательном математическом подходе. Для восстановления одномерных неоднородностей (глубинных профилей) проводимости разработан алгоритм метода двойственной регуляризации на компактных классах функций, а метод томографии и голографии объемных неоднородностей развит для случая зондируемых объектов с односвязными включениями.

Обратная задача магнитотеллурической диагностики земной коры впервые была сформулирована в работах А.Н.Тихоновым [1] в рамках развитой им теории некорректных обратных задач [2] для модели земной коры со слоистой структурой глубинного профиля проводимости по данным многочастотных измерений электромагнитных полей искусственного и естественного происхождения на ультранизких частотах, способных проникать вглубь земной коры на несколько километров. Глубинную чувствительность этого метода обеспечивала зависимость толщины скин-слоя от частоты. Далее метод развивался в многочисленных работах [см. в 3-9] и нашел широкое применение. Для решения соответствующих нелинейных некорректных задач использовались различные методы регуляризации (различные варианты метода Тихонова, параметризация, сведение к системе уравнений, статистическая регуляризация, нейросетевые подходы). Спецификой наших подходов [7-9] являлось использование математически последовательных методов: итерационных алгоритмов, основанных на решении эквивалентного нелинейного уравнения 1-го рода и алгоритмов, основанных на новом методе в теории нелинейных некорректных задач, основанном на классическом лагранжевом подходе – методе двойственной регуляризации [10-11]. В данной работе первый из этих методов развивается в русле наших работ [12-14] по сканирующей электромагнитной томографии и голографии объемных подповерхностных неоднородностей. Алгоритмы второго метода – метода двойственной регуляризации [10-11] развиваются

для решения задачи восстановления профиля проводимости земной коры на компактных классах монотонных и выпуклых функций. Представлены результаты численного моделирования.

ТОМОГРАФИЯ И ГОЛОГРАФИЯ В предлагаемой схеме метода сканирующей томографии и голографии, предложенной нами в работах [12-14], используются данные двумерного сканирования комплексных амплитуд рассеянного сигнала в зависимости от третьего параметра, определяющего глубинную чувствительность – частоты. Задача томографии описывается трёхмерными интегральными уравнениями, имеющими в борновском приближении вид свёртки по поперечным координатам, что позволяло путём двумерного преобразования Фурье по этим координатам сводить их к решению одномерного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода для глубинного профиля двумерного поперечного спектра неоднородности для каждой пары волновых чисел (в k -пространстве). Обратное двумерное Фурье преобразование решения этого уравнения (получаемого методом обобщённой невязки Тихонова) даёт искомую трёхмерную структуру проводимости. Такая редукция позволяет преодолеть ограничения исходной трёхмерной задачи на размерность дискретизации при численном решении, и, тем самым, существенно повысить разрешающую способность томографии, и этот подход используется в решении рассматриваемой в проекте задачи УНЧ томографии земной коры.

Для низкочастотных диапазонов радиоволн на земной поверхности выполняются граничные условия Леонтовича, в силу чего можно считать волну распространяющейся вглубь по нормали к земной поверхности $z = 0$, а земную кору можно считать проводником с чисто мнимой комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \approx i4\pi\sigma / \omega$, которую определяет проводимость σ . Если методом двумерного сканирования измеряются вариации, например, y -компоненты магнитного поля H_{1y} на поверхности грунта ($z = 0$) в зависимости от частоты падающей волны в УНЧ диапазоне, то, полагая выполненными граничные условия Леонтовича, интегральное уравнение задачи томографии проводимости земной коры в борновском приближении записывается как:

$$H_{1y}(\kappa_x, \kappa_y, \omega) = H_{0y} T(\kappa_x, \kappa_y) \frac{(1+i)\omega\delta}{4c^2} \times \int_{-\infty}^0 \sigma_1(\kappa_x, \kappa_y, z') \exp\left(\frac{z}{\delta} + i\frac{z}{\delta}\right) \cdot \exp[-i\sqrt{k^2 - \kappa_x^2 - \kappa_y^2}z] \cdot dz \quad (1)$$

где H_{0y} – комплексная амплитуда зондирующего магнитного поля на земной поверхности κ_x, κ_y – пространственные частоты поперечного спектра,

$T = (\kappa_x T^{\parallel} + \kappa_y T^{\perp}) / \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}$, $T^{\parallel, \perp}$ – коэффициенты прохождения из среды в вакуум на параллельной и перпендикулярной (по электрическому полю) поляризациях, ω – циклическая частота, $\delta = c / \sqrt{2\pi\omega\sigma_0}$ – масштаб скин-слоя, σ_0 – проводимость среды, содержащей неоднородность σ_1 , интегрирование выполняется по глубине z , c – скорость света. Уравнение (1) является уравнением Фредгольма 1-го рода относительно глубинного распределения поперечных спектральных компонент неоднородности проводимости.

Уравнение (1) можно представить в виде:

$$s(k_x, k_y, \omega) = \int_{z'} \sigma_1(k_x, k_y, z') K(k_x, k_y, z', \omega) dz', \quad (2)$$

Опыт решения аналогичной задачи в СВЧ диапазоне [14] показал, что данные измерений сигнала, рассеянного на зондируемых неоднородностях сильно зашумляются вкладом поверхностного рассеяния, но оказалось, что если синтезировать из многочастотных данных псевдоимпульс

$$s(x_r, y_r, t) = \int_0^{\infty} s(x_r, y_r, \omega) \exp(i\omega t) d\omega = \int \sigma_1(\mathbf{r}') K(x_r - x', y_r - y', z_r, t, z') dx' dy' dz', \quad (3)$$

в котором время зависимость от времени задержки удобно трансформировать в зависимость от параметра эффективной глубины рассеяния z_s согласно $s(x_r, y_r, z_s) = s(x_r, y_r, t = -z_s \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon_0} / c)$, и тогда (2) можно записать в виде:

$$s(x_r, y_r, z_s) = \iiint \sigma_1(x', y', z') K(x_r - x', y_r - y', z_r, z_s, z') dx' dy' dz'. \quad (4)$$

На визуализированном изображении двумерного распределения амплитуды такого псевдоимпульса $|s(x_r, y_r, z_s)|$ зондируемые подповерхностные неоднородности становятся отчетливо различимы в некотором интервале значений эффективной глубины рассеяния, которые растут с глубиной зондируемого объекта. Двумерное фурье-преобразование (4) приводит к новому одномерному интегральному уравнению, которое связывает глубинный профиль поперечного спектра неоднородности с поперечным спектром комплексного псевдоимпульса:

$$s(k_x, k_y, z_s) = \int_{z'} \sigma_1(k_x, k_y, z') K_1(k_x, k_y, z', z_s) dz', \quad (5)$$

$$K_1(k_x, k_y, z', t) = \int_0^{\infty} K(k_x, k_y, z', \omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Из решения (5) в k -пространстве искомая трехмерная структура неоднородности определяется обратным фурье-преобразованием:

$$\sigma_1(x, y, z) = \iint \sigma_1(k_x, k_y, z) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y. \quad (6)$$

Для решения задачи определения положения границ объекта необходимо ввести в алгоритм решения задачи дополнительную априорную информацию о постоянстве диэлектрических параметров внутри этого объекта. Для этого был использован подход, развитый нами в [14], основанный на непосредственном использовании восстановленного профиля поперечного спектра объекта $\sigma_1(k_x, k_y, z')$ с постоянной внутренней комплексной диэлектрической проницаемостью. Здесь мы обобщим подход, развитый нами в [14] в приложении к СВЧ зондированию, в котором непосредственно используется восстановленный из решения (5) профиль поперечного спектра неоднородности в k -пространстве.

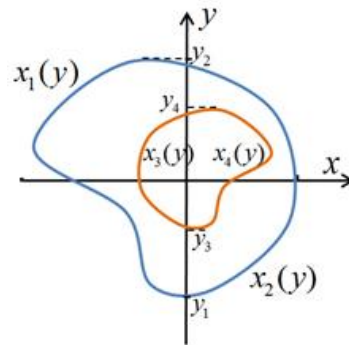


Рисунок 1 – сечение сплошного объекта с включением в сечении $z' = const$ внешними границами, описываемыми функциями $x_1(y)$ и $x_2(y)$ и сечение объекта с включением, границы которого описываются функциями $x_3(y)$, $x_4(y)$.

Если в декартовой системе координат мы зададим форму поверхности однородного объекта $\sigma_1 = \sigma_1^0 = const$ в виде двух функций $x_1(y, z)$, $x_2(y, z)$, а форму односвязного включения с $\sigma_1 = \sigma_1^{02} = const$ – в виде $x_3(y, z)$, $x_4(y, z)$, заданных в каждом сечении z (рис.1), то получаем следующую систему комплексных уравнений для двух или более значений k_x :

$$\sigma_1(k_x, y, z) = \frac{\sigma_1^0}{2\pi i k_x} (e^{-ik_x x_1(y, z)} - e^{-ik_x x_2(y, z)}) + \frac{(\sigma_1^{02} - \sigma_1^0)}{2\pi i k_x} (e^{-ik_x x_3(y, z)} - e^{-ik_x x_4(y, z)}), \quad (7)$$

$$\sigma_1(k_x, y, z) = \int_{k_y} \sigma_1(k_x, k_y, z) \exp(ik_y y) dk_y.$$

На рис.2 представлены результаты численного моделирования для параллелепипеда с размерами $4 \times 4 \times 3 \text{ км}^3$ и полостью размером $2 \times 2 \times 1,5 \text{ км}^3$ для параметров $\sigma_0 = 5 \times 10^{-4} \text{ См / м}$, $\sigma_1^0 = 2 \times 10^{-3} \text{ См / м}$, $\sigma_1^{02} = 0$.

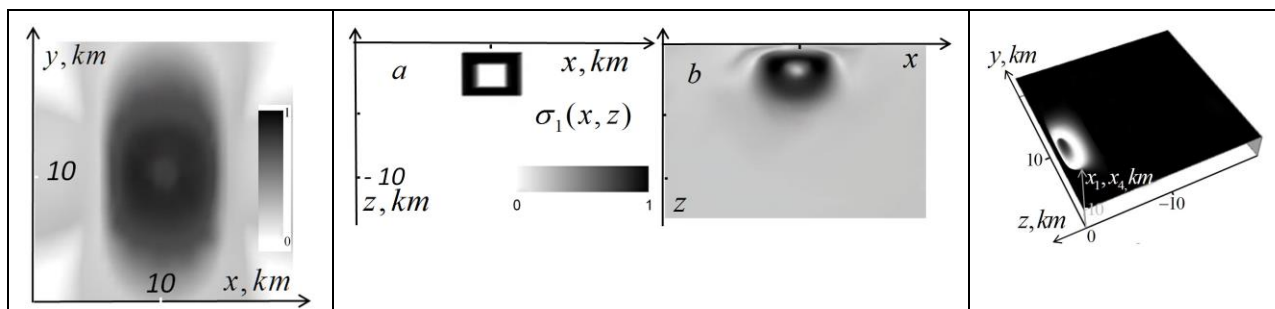


Рисунок 2 – Слева – Поперечное распределение амплитуды псевдоимпульса $|H_{1y}(x, y, z_s = -2km)| / H_{\max}$. В центре слева – моделируемые распределения неоднородностей проводимости (вертикальный разрез через центр неоднородностей); в центре справа – результат восстановления из решения задачи томографии. Справа – голографическое изображение неоднородности с полостью. Скомбинированы изображения внешней границы объекта, описываемой функцией $x_1(y, z)$, и внутренней границы полости, описываемой функцией $x_4(y, z)$.

Полость в объекте видна в томографическом изображении, однако имеет место существенное расплывание и заглаживание ее формы. Голографический анализ позволяет лучше судить о структуре объекта. Но для более заглубленных объектов с включениями задача усложняется и требует таких высоких точностей, которые трудно реализовать на практике.

МЕТОД ДВОЙСТВЕННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НА КОМПАКТНЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ В ДИАГНОСТИКЕ ПОДПОВЕРХНОСТНОГО ПРОФИЛЯ ПРОВОДИМОСТИ

Алгоритм метода двойственной регуляризации исследован в применении к более простой задаче УНЧ зондирования одномерно неоднородной среды с целью восстановления глубинного профиля проводимости $\sigma(z)$. Чтобы исключить трудно контролируемые частотные вариации падающего поля, в геомагнитном зондировании в анализе обычно используется отношение поперечных компонент электрического и магнитного полей (комплексный импеданс) $Z_0(\omega) = E_0 / H_0$. По нему легко вычислить коэффициент отражения $R_0(\omega) = (Z_0(\omega) - 1) / (Z_0(\omega) + 1)$, и именно этот параметр мы будем использовать в последующем анализе. Магнитотеллурические данные часто измеряются с существенными погрешностями, но для случая измерений на большом числе рядом лежащих частот влияние этих погрешностей можно существенно уменьшить, трансформируя их, как и выше, во временную область с помощью трансформации:

$$R_0(t) = \int_{\omega} R_0(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (8)$$

При этом некоррелированная часть ошибки сдвигается в область больших значений t , вне области, где импульс формируется

подповерхностной неоднородностью. Временной параметр также удобно заменить на пространственный параметр эффективной глубины рассеяния $z_s = -tc / 2\text{Re}(\sqrt{\varepsilon})$ (принимая во внимание скорость света в среде), и записать условие, выражающее равенство рассчитанного спектра коэффициента отражения измеренным его значениям:

$$R[\sigma, \omega](z_s) = R_0(z_s, \omega) \quad (9)$$

Для применения метода двойственной регуляризации в нелинейных задачах необходимо использовать модифицированную функцию Лагранжа со штрафными функциями:

$$L_\mu[\sigma](\lambda) = \|\sigma\|^2 + \lambda_2(z_s)(\text{Im } R[\sigma](z_s) - \text{Im } R_0(z_s))dz_s + \mu \left\{ \left(\int_{z_s} |R[\sigma](z_s) - R_0(z_s)|^2 dz_s \right)^{1/2} + \left(\int_{z_s} |R[\sigma](z_s) - R_0(z_s)|^2 dz_s \right) \right\} \quad (10)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu > 0$. Роль параметра μ состоит в том, что при его достаточно больших значениях модифицированная функция Лагранжа $L_\mu[\sigma](\lambda)$ гарантированно достигает минимума. Однако этот минимум в общем случае не является единственным. Поэтому параллельно исходной задаче минимизации решается регуляризованная по Тихонову двойственная задача максимизации выпуклого функционала в гильбертовом пространстве:

$$V_\mu^\alpha[\sigma](\lambda) = \min_{\sigma \in D} L_\mu[\sigma](\lambda) - \alpha \|\lambda\|^2 \rightarrow \max_{\|\lambda\| \leq \mu} \quad (11)$$

где максимум по множителям Лагранжа λ ищется на множестве $\Lambda_\mu \equiv \{\lambda \in L_2^2(z_{s1}, z_{s2}) : \|\lambda\| \leq \mu\}$. Седловая точка этого процесса минимизации по σ и максимизации по двойственной переменной λ дает искомое решение.

В ряде случаев на основе визуализации псевдоимпульса в алгоритм может быть введена априорная информация о принадлежности искомого решения $\sigma(z)$ к одному из компактных классов функций D (монотонных убывающих M_\downarrow или возрастающих M_\uparrow ограниченных сверху и снизу функций или выпуклых вверх $\overset{\vee}{M}$ или вниз \hat{M} ограниченных функций).

При заданной дискретизации функция $\sigma(z)$ в каждом из интервалов может быть представлена выпуклой комбинацией

$$\sigma = \sum_{j=0}^n a_j T^{(j)}, \quad (12)$$

соответствующим образом выбранных n -мерных векторов $T^{(j)}$ (базис в R^n , см. в [2]). Таким образом, при минимизации (10) вместо вектора σ мы имеем дело с вектором коэффициентов a в разложении (12), и градиентная

минимизация дает функцию из выбранного класса на каждом шаге итерационного процесса.

Пример численного моделирования, представленный на рис.3, демонстрирует восстановление профиля проводимости $\sigma(z)$ на классе выпуклых функций в среде с высоким уровнем проводимости $\sigma_0 = \sigma(z=0) = 0.01 \text{ См/м}$. Чтобы показать информативную часть сигнала, входные данные представлены в виде амплитуды отклонения $\Delta r = |R_0[\sigma(z)] - R[\sigma_0]|$ коэффициента отражения, вычисленного для неоднородной среды с профилем $\sigma(z)$, от вычисленного для полупространства с $\sigma = \sigma_0, z \leq 0$.

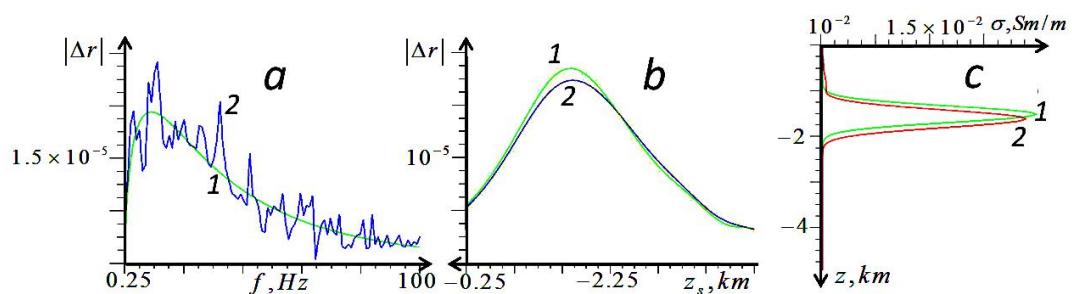


Рисунок 3 – а) 1 – $\Delta r(f) = |R_0[\sigma(z)](f) - R[\sigma_0](f)|$ – амплитуда информативной части сигнала, вычисленная для исходного профиля (линия 1 на рис.3с, 2 – «данные измерений» со случайной ошибкой; б) 1 – $\Delta r(z_s) = |R_0[\sigma(z)](z_s) - R[\sigma_0](z_s)|$ – псевдоимпульс $\Delta r(z_s)$, синтезированный из частотной зависимости $\Delta r(\sigma)$ (линия 1 на рис.3а), 2 – псевдоимпульс, синтезированный по данным с ошибкой (линия 2 на рис.3а); в) 1 – исходный профиль $\sigma(z)$; 2 – восстановленный профиль. $f = \omega / 2\pi$.

Исследования были выполнены при поддержке РФФИ, проект № 13-02-12155_офи_м, программы ОФН РАН, а также частично поддержана грантом (соглашение от 27 августа 2013г. № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

Список использованных источников

1. Тихонов А.Н. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры // Доклады АН СССР. Нов. сер. – 1950. – Т.73, №2. – С.295-297.
2. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983.
3. Cagniard L. Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting // Geophysics – 1953.– V.18. – P. 605-635.

4. Велихов Е.П., Жамалетдинов А.А., Собчаков Л.А. и др. Опыт частотного электромагнитного зондирования земной коры с применением мощной антенны СНЧ-диапазона // Доклады РАН – 1994. – Т. 338, №1. – С. 106-109.
5. Zhdanov M.S. and Keller G. The Geoelectrical Methods in Geophysical Exploration. – Elsevier: Amsterdam, 1994 – .
6. Gaikovich K. P. Inverse Problems in Physical Diagnostics. – Nova Science Publishers Inc., New York, 2004. – 372 pp.
7. Гайкович К.П., Смирнов А.И. Обратные задачи низкочастотного когерентного зондирования земной коры. Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, Н.Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2007, № 2, с. 73-80.
8. Гайкович К.П., Кутерин Ф.А., Смирнов А.И., Сумин М.И. Двойственная регуляризация в обратной задаче УНЧ зондирования земной коры // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского – 2009. – №1. – С.47-52.
9. Гайкович К.П., Гайкович П.К., Галкин О.Е., Смирнов А.И., Сумин М.И. Двойственная регуляризация в одномерных обратных задачах рассеяния // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского – 2013. – №1(1). – С. 57-72.
10. Sumin M. I. Regularized Dual Method for Nonlinear Mathematical Programming // Comput. Math. Math. Phys. – 2007. – V. 1347, — P. 760-779.
11. Сумин М.И. Регуляризованный двойственный метод решения нелинейной задачи математического программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т. 47, №5. – С.794-814.
12. Gaikovich K.P. Subsurface Near-Field Scanning Tomography // Phys. Rev. Lett. – 2007. – V.98, N.18. – P.183902.
13. Gaikovich K.P., Gaikovich P.K. Inverse problem of near-field scattering in multilayer media // Inverse Problems – 2010. – V.26, N.12. – P. 125013.
14. Gaikovich K.P., Gaikovich P.K., Maksimovitch Ye.S., Badeev V.A. Pseudopulse near-field subsurface tomography // Physical Review Letters – 2012 – V. 108, N.16 – P. 163902.

Получено 21.03.04.