УДК 621.371+537.87

[1] К.П. ГАЙКОВИЧ, П.К.ГАЙКОВИЧ, [2] М.И.СУМИН, О.Е.ГАЛКИН,
[3] А.И.СМИРНОВ

[1] Институт физики микроструктур Российской академии наук, Нижний Новгород

E-mail: gai@ipm.sci-nnov.ru

[2] Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского

E-mail: msumin@sinn.ru

[3] Институт прикладной физики Российской академии наук, Нижний Новгород

E-mail: smirnov@appl.sci-nnov.ru

Двойственная регуляризация в одномерной обратной задаче рассеяния

XXI Симпозиум по радиолокационному зондированию природных сред

Предложен метод восстановления подповерхностных профилей диэлектрической проницаемости одномерно-неоднородной среды по измерениям рассеянного поля, основанный на лагранжевом формализме в решении нелинейных некорректных обратных задач. Метод позволяет решать задачи в их естественных постановках для исходных уравнений Максвелла. Эффективность метода демонстрируется в численном моделировании восстановления профиля проводимости земной коры по данным спектральных ОНЧ измерений.

Необходимость в решении одномерных обратных задач рассеяния возникает в самых разных методах электромагнитной и акустической диагностики одномерно неоднородных сред. Впервые такая задача была сформулирована и решалась А.Н.Тихоновым в рамках развитой им теории некорректных обратных задач [1] для магнитотеллурического зондирования земной коры со слоистой структурой глубинного профиля проводимости по данным многочастотных измерений электромагнитных полей искусственного и естественного происхождения на ультранизких частотах, способных проникать вглубь земной коры на несколько километров [2]. При этом частотная зависимость толщины скин-слоя обеспечивает глубинную чувствительность метода. На классе непрерывных функций эта задача решалась в [3,4] путем ее сведения к нелинейному интегральному уравнению 1-го рода и его решения итерациями, начиная с борновского приближения, методом обобщенной невязки Тихонова [5]. Исследования показали, что такой метод решения этого уравнения не эффективен для сильных неоднородностей проводимости и даже для слабых теряет сходимость после 2-3 итераций.

Более сложные задачи возникают в задачах диагностики неоднородного полупространства по угловой и спектральной зависимости коэффициента отражения [6,7], включая и неоднородности в многослойных структурах [8] возникающие из-за диффузии материала в процессе изготовления методом эпитаксии. Эти задачи также сводились к решению нелинейного интегрального уравнения 1-го рода. Однако, даже в случаях, когда борновское приближение обладает достаточной точностью [7], решение может сильно искажаться ошибкой линеаризации при выделении вклада возмущения в измеряемый коэффициент отражения по мощности.

Таким образом, возникает необходимость в альтернативных подходах к решению таких нелинейных обратных задач. Применительно к обратной задаче геомагнитного зондирования в [8] был предложен метод двойственной регуляризации, алгоритм которого в самой простой форме был исследован в [9], где показано, что он позволяет восстанавливать сильные неоднородности профиля проводимости. Метод основан на лагранжевом подходе в общей теории методов оптимизации и оптимального управления [10,11], которые позволяют решать сложные обратные задачи непосредственно в рамках их естественных дифференциальных постановок, без перехода к нелинейному интегральному уравнению. Отметим также, что характерной особенностью предложенных алгоритмов, основанных на теории двойственности, является параллельное решение сразу двух задач – исходной и двойственной к ней. При этом процесс решения двойственной задачи, которая всегда является задачей выпуклой оптимизации приводит одновременно и к конструктивному построению устойчивых к ошибкам данных приближений к решению исходной задачи.

В данной статье излагается теория построения двойственных алгоритмов одномерных обратных задач рассеяния и приводятся результаты численного моделирования решения задачи геомагнитного зондирования, иллюстрирующие эффективность решения для сильных неоднородностей.

ТЕОРИЯ Рассмотрим полупространство $z < 0$ в котором имеется неоднородное распределение комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$, зондируемое плоской электромагнитной волной горизонтальной поляризации $E_y(\mathbf{r}) = E(z)\exp(ik_x x + ik_y y)$ (в дальнейшем у компонент электрического и магнитного полей E_y, H_x опускаем индексы). Комплексные амплитуды гармонического электрического поля в среде удовлетворяют уравнению:

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2[\varepsilon(z) - \cos^2\theta]E = 0, \qquad (1)$$

где θ – угол места падения волны. Постановки рассматриваемых задач определяются спецификой граничных условий и измеряемыми параметрами.

1. *Задача геомагнитного зондирования.* Для УНЧ-СНЧ диапазонов радиоволн на земной поверхности выполняются граничные условия Леонтовича, в силу чего можно считать волну распространяющейся вглубь по нормали к земной поверхности $z = 0$, а земную кору можно считать проводником с чисто мнимой комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \approx i\dfrac{4\pi\sigma}{\omega}$, которую определяет профиль проводимости $\sigma(z)$ Уравнения Максвелла в этом случае принимают вид:

$$\frac{d^2E}{dz^2} + i\frac{4\pi\sigma(z)\omega}{c^2}E = 0, \quad H = i\frac{c}{\omega}\frac{dE}{dz}, \quad z_n \le z \le 0, \tag{2}$$

где c – скорость света, ω – циклическая частота, $z_n < 0$ – нижняя граница интервала анализа, в котором заведомо находится область искомой неоднородности профиля проводимости, а измеренными считаются электрические и магнитные поля на поверхности $z = 0$

$$E(z = 0, \omega) = E_0(\omega), \; H(z = 0, \omega) = H_0(\omega)\,. \tag{3}$$

Следует отметить, что измерения полей не являются независимыми: так, при фиксированном электрическом поле соответствующее спектральное распределение магнитного поля будет определяться профилем проводимости среды. Поэтому в геомагнитном зондировании измеряемой величиной обычно является отношение полей (комплексный импеданс).

Подчеркнем и другую особенность постановки обратной задачи УНЧ зондирования. Мы считаем величину z_n конечной и задаем поля $E(z = z_n, \omega)$, $H(z = z_n, \omega)$ на этой нижней границе, считая их дополнительными вспомогательными неизвестными, подлежащими нахождению наряду с проводимостью $\sigma(z)$. Данный прием введения вспомогательных дополнительных неизвестных оказывается удобным с математической точки зрения, так как он основывается на использовании классов функций, задаваемых лишь на конечном интервале $[z_n, 0]$, что облегчает обоснование сходимости метода регуляризации. Существенно, что рассматриваемая задача линейна по этим вспомогательным переменным. Отметим также, что возможна и несколько иная постановка задачи, использующая условие постоянства проводимости за пределами интервала восстановления. Переформулируем задачу в новых обозначениях:

$$x_1 = \operatorname{Re}E, \; x_2 = \frac{d\operatorname{Re}E}{dz}, \; x_3 = \operatorname{Im}E, \; x_4 = \frac{d\operatorname{Im}E}{dz}. \tag{4}$$

Тогда исходная обратная задача УНЧ зондирования для восстановления подповерхностного профиля проводимости земной коры $\sigma(z)$ в новых переменных примет вид эквивалентной задачи минимизации

$$
\begin{gathered}
I_0(\sigma, x_m) \equiv \|\sigma\|^2 + \|x_n\|^2 \to \min, \\
I_1(\sigma, x_m) = x_0(\omega), \sigma \in D, D \equiv \{\sigma \in L_2(z_n, 0) : 0 \le \sigma(z)\}, D \subset L_2(z_n, 0), x_n \in R^4 \\
\frac{dx}{dz} = A(\sigma(z))x, \quad x(z_n) = x_n, \\
I_1(\sigma, x_n)(\omega) \equiv x[\sigma, x_n](z=0) \equiv x[\sigma\omega, x_n](z=0) \equiv x_0(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2].
\end{gathered}
\tag{5}
$$

$$
A\sigma(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\sigma(z)\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a\sigma(z)\omega & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; x(\omega) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} E(\omega) \\ \dfrac{d \operatorname{Re} E}{dz}(\omega) \\ \operatorname{Im} E(\omega) \\ \dfrac{d \operatorname{Im} E}{dz}(\omega) \end{pmatrix}, \; x_0(\omega) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} E_0(\omega) \\ \operatorname{Im} H_0(\omega)\omega / c \\ \operatorname{Im} E_0(\omega) \\ -\operatorname{Re} H_0(\omega)\omega / c \end{pmatrix},
$$

где $a = 4\pi/c^2$. Существенно отметить, что в рамках данного рассмотрения компоненты электромагнитного поля x_n на нижнем уровне интервала, на котором восстанавливается профиль проводимости, также рассматриваются как неизвестные величины, которые определяются из решения задачи.

Можно доказать, что эта задача имеет решение. Значение минимизируемого функционала I_0 на этом решении обозначим через I_0^*. В то же время, нельзя гарантировать единственность оптимального элемента из-за нелинейности в ограничении этой оптимизационной задачи (нелинейность типа произведения управления на траекторию).

В случае линейных обратных задач, которые сводятся к эквивалентным линейно выпуклым оптимизационным задачам, для их решения на основе двойственной регуляризации достаточно конструкции классической функции Лагранжа. В нелинейных случаях необходимо использовать конструкции модифицированных функций Лагранжа, т.е. обычных функций Лагранжа с добавленными к ним штрафными слагаемыми того или иного вида. Рассмотрим здесь один из возможных случаев модифицированной функции Лагранжа задачи (4)

$$
\begin{gathered}
L_\mu(\sigma, x_n, \lambda) \equiv \|\sigma\|^2 + \|x_n\|^2 + \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\lambda(\omega), x[\sigma, x_n](z=0,\omega) - x_0(\omega)) d\omega + \\
\mu\Big(\sqrt{\int_{\omega_1}^{\omega_2} |x[\sigma, x_n](z=0,\omega) - x_0(\omega)|^2 \, d\omega} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} |x[\sigma, x_n](z=0,\omega) - x_0(\omega)|^2 \, d\omega\Big) \equiv \\
\equiv \|\sigma\|^2 + \|x_n\|^2 + (\lambda, I_1(\sigma, x_n) - x_0) + \mu(\|I_1(\sigma, x_n) - x_0\| + \|I_1(\sigma, x_n) - x_0\|^2).
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Смысл параметра μ состоит в том, что при его достаточно большом значении гарантированно достигается минимум (6). В соответствии с результатами [10,11], запишем регуляризированную по Тихонову с параметром регуляризации α модифицированную двойственную задачу, представляющую собой задачу максимизации вогнутого функционала на гильбертовом пространстве $L_2^4(\omega_1,\omega_2)$:

$$
\begin{gathered}
V_\mu^\alpha(\lambda) = V_\mu(\lambda) - \alpha \| \lambda \|^2 \to \max \equiv \min_{\sigma \in D, \xi \in R^4} L_\mu(\sigma, x_m, \lambda) - \alpha \| \lambda \|^2, \\
\lambda \in \Lambda_\mu \equiv \{\lambda \in L_2^4(\omega_1,\omega_2) : \| \lambda \| \le \mu\}, \\
\lambda \in L_2^4(\omega_1,\omega_2),\ \mu > 0,\ L_2^4(\omega_1,\omega_2) \equiv L_2(\omega_1,\omega_2) \times L_2(\omega_1,\omega_2) \times L_2(\omega_1,\omega_2) \times L_2(\omega_1,\omega_2).
\end{gathered} \tag{7}
$$

Минимум модифицированного функционала Лагранжа $L_\mu(\sigma, x_n, \lambda)$ достигается на некотором элементе $(\sigma_\mu[\lambda], x_{n\mu}[\lambda])$, причем такой элемент, вообще говоря, не единственный. Обозначим множество всех таких элементов $\Sigma_\mu[\lambda]$. Функционал V_μ является вогнутым на $L_2^4(\omega_1,\omega_2)$, но из-за нелинейности задачи он не является дифференцируемым в обычном смысле. Для функционала V_μ может быть выписана явная формула для супердифференциала в каждой точке $\lambda \in L_2^4(\omega_1,\omega_2)$, что и позволяет организовать вычислительную устойчивую к ошибкам исходных данных процедуру решения обратной задачи.

2. *Задача восстановления профиля диэлектрической проницаемости среды по коэффициенту отражения.* В случае измерений коэффициента отражения от среды с неоднородным профилем диэлектрической проницаемости в зависимости от частоты или угла падения зондирующих плоских волн постановка задачи для уравнения (1) трансформируется. Удобно ввести обозначения

$$
E(z=0, \varepsilon(z)=1, \omega) = E_0, \quad e = \frac{E(z=0, \varepsilon(z), \omega)}{E_0}, \tag{8}
$$

при которых уравнение (1) сохраняет свой вид:

$$
\frac{d^2 e}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\varepsilon(z) - \cos^2\theta] e = 0\,. \tag{9}
$$

Если измеряется коэффициент отражения по мощности

$$
R(\omega) = \frac{\left| E(z=0, \varepsilon(z), \omega) - E(z=0, \varepsilon=1, \omega) \right|^2}{\left| E(z=0, \varepsilon=1, \omega) \right|^2} = \left| e(z=0) - 1 \right|^2. \tag{10}
$$

При таких измерениях из-за потери информации о фазе профиль комплексной диэлектрической проницаемости можно определить, только для неоднородности без поглощения или, если имеется связь между действительной и мнимой частями диэлектрической проницаемости – так, как например, в периодических эпитаксиальных структурах [7], где неоднородность образована смесью двух веществ с параметрами ε_{01} и ε_{02}, так что профиль неоднородности может меняться только между этими значениями, и его можно определить действительной функцией $\varepsilon(z)=\varepsilon_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)f(z)$, которая представляется в виде $\varepsilon(z)=\mathrm{c}+i\mathrm{d}+(\mathrm{a}+i\mathrm{b})f(z)$ с разделенными действительной и мнимой частями, где a,b,c,d – действительные числа. Тогда, если ввести обозначения

$$\operatorname{Re}e=x_1,\ \frac{d\operatorname{Re}e}{dz}=x_2,\ \operatorname{Im}e=x_3,\ \frac{d\operatorname{Im}e}{dz}=x_4. \tag{11}$$

В данном случае мы считаем поле и его производную $E(z=0,\omega)$, $dE/dz(z=0,\omega)$ на верхней границе дополнительными вспомогательными неизвестными, подлежащими определению наряду с проводимостью $f(z)$. С полями на нижней границе интервала решения можно поступить так, как и в рассмотренной выше задаче, но для краткости мы здесь не будем их специально рассматривать. Тогда обратная задача в новых переменных примет вид эквивалентной задачи минимизации

$$I_0(f,x_0)\equiv\|f\|^2+\|x_0\|^2\to\min,\ I_1(f,x_0)=R(\omega),\ (f,x_0)\in \mathrm{L}_2(z_n,0)\times R^4\equiv \mathrm{D}, \tag{12}$$
$$I_1(f,x_0)(\omega)\equiv[x_1(z=0,\omega)-1]^2+x_3^2(z=0,\omega),\ \omega\in[\omega_1,\omega_2],$$
$$(f,x)\in \mathrm{D}\equiv\{f:[z_n,0]\to \mathrm{R};\ f\in \mathrm{L}_2(z_n,0);\ x\in \mathrm{R}^4\},$$
$$\frac{dx}{dz}=A(f(z))x,\quad x(z=0)=x_0\equiv(x_{01},x_{01},x_{01},x_{01})^*,\quad x(z)\to 0,\ z\to-\infty,$$
$$A(f(z))=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -(\frac{\omega}{c})^2(\mathrm{c}+\mathrm{a}f-\cos^2\theta) & 0 & (\frac{\omega}{c})^2(\mathrm{d}+\mathrm{b}f) & 0\\ 0 & 0 & & 1\\ -(\frac{\omega}{c})^2(\mathrm{d}+\mathrm{b}f) & 0 & -(\frac{\omega}{c})^2(\mathrm{c}+\mathrm{a}f-\cos^2\theta) & 0\end{pmatrix},\ x(\omega)=\begin{pmatrix}\operatorname{Re}e(\omega)\\ \frac{d\operatorname{Re}e}{dz}(\omega)\\ \operatorname{Im}e(\omega)\\ \frac{d\operatorname{Im}e}{dz}(\omega)\end{pmatrix}.$$

Модифицированный функционал Лагранжа для этой задачи имеет вид:

$$L_\mu(f,x_0,\lambda)\equiv\|f\|^2+\|x_0\|^2+\int_{\omega_1}^{\omega_2}\lambda(\omega)[I_1[f,x_0](\omega)-R(\omega)]d\omega$$
$$+\mu(\sqrt{\int_{\omega_1}^{\omega_2}[I_1[f,x_0](\omega)-R(\omega)]^2d\omega}+\int_{\omega_1}^{\omega_2}[I_1[f,x_0](\omega)-R(\omega)]^2d\omega), \tag{13}$$

а регуляризированная модифицированная двойственная задача –

$$
\begin{aligned}
&V_\mu^\alpha = V_\mu(\lambda) - \alpha \,\|\, \lambda \,\| \equiv \min_{(f, x_0) \in \mathrm{R}^4 \times \mathrm{L}_2(0, z_n)} L_\mu(f, x_0, \lambda) - \alpha \,\|\, \lambda \,\| \to \max, \\
&\lambda \in \Lambda_\mu \equiv \{ \lambda \in \mathrm{L}_2(\omega_1, \omega_2) : \| \lambda \| \le \mu \}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Для периодически неоднородных многослойных сред [7] задачу следует решать при дополнительном условии $f(z) = f(z+d), \quad z_n \le z \le 0, \ d = -z_n / n$ При измерениях отражения в зависимости от угла падения зондирующей волны в алгоритме нужно сделать соответствующие очевидные замены аргументов и переменных интегрирования. Все утверждения, сделанные выше, по поводу решения задачи УНЧ зондирования, справедливы и в данном случае.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ Был разработан алгоритм метода двойственной регуляризации решения задачи низкочастотного зондирования профиля проводимости земной коры и выполнены его исследования в численном моделировании. В вычислениях полагалось, что на поверхности поддерживается уровень зондирующего электрического поля $E_0(\omega, z=0) = 1$. На рис.2 представлен пример моделирования для неоднородности профиля с двумя максимумами, демонстрирующий эффективность метода.

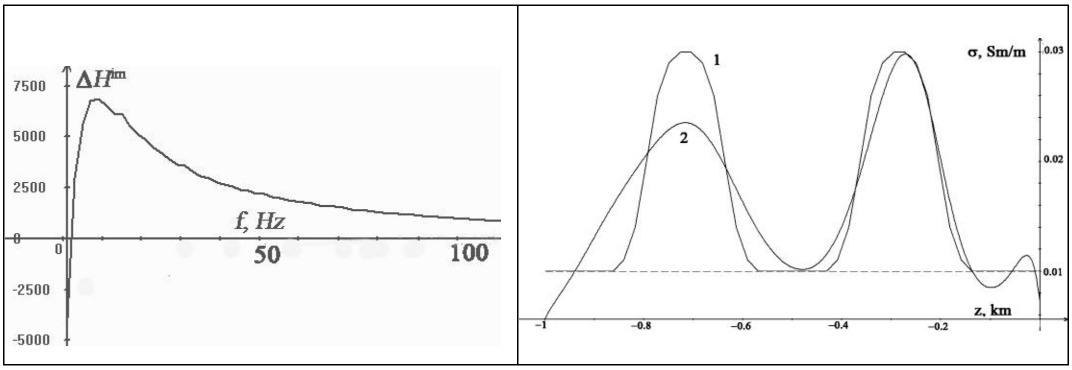

Рисунок 1. Численное моделирование восстановления профиля проводимости. Слева – «данные измерений» в зависимости от частоты при уровне случайной погрешности 1%; справа 1 – исходный профиль, 2 – результат восстановления.

программа Array Visualizer

ЗАКЛЮЧЕНИЕ Предложен метод двойственной регуляризации для восстановления подповерхностных профилей диэлектрической проницаемости одномерно-неоднородной среды, основанный на лагранжевом формализме в решении нелинейных некорректных обратных задач. Метод позволяет решать задачи в их естественных постановках для исходных уравнений Максвелла.

Выражения признательности. Результаты получены при поддержке РФФИ (проект № 11-02-97060_р_поволжье) и программы ОФН РАН.

Список использованных источников

1. Тихонов А.Н. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры // Доклады АН СССР. Нов. сер. – 1950. – Т.73, №2. – С.295-297.
2. Велихов Е.П., Жамалетдинов А.А., Собчаков Л.А. и др. Опыт частотного электромагнитного зондирования земной коры с применением мощной антенны СНЧ-диапазона // Доклады РАН – 1994. – Т. 338, №1. – С. 106-109.
3. Gaikovich K. P. Inverse Problems in Physical Diagnostics. —Nova Science Publishers Inc., New York, 2004 — 372 pp.
4. Гайкович К.П., Смирнов А.И. Обратные задачи низкочастотного когерентного зондирования земной коры. Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, Н.Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2007, № 2, с. 73-80.
5. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983.
6. On retrieval of permittivity profile / K. Gaikovich, I. Vorgul, M. Marciniak // Proceedings of ICTON’2001 (18-21 June, 2001, Cracow, Poland). —2001. —P. 238-240.
7. Barisheva M. M., Gaikovich K. P., Gaikovich P. K., Polkovnikov V. N., Vainer Yu. A., Zuev S. Yu. Reflectometry Sounding of Inhomogeneities in Periodic Multilayer Structures. Proceedings of 12th International Conference on Transparent Optical Networks (ICTON 2010, Munich, Germany, June 27-July 1, 2010), pp.Tu.P5 (1-4).
8. Гайкович К.П., Кутерин Ф.А., Смирнов А.И., Сумин М.И. Двойственная регуляризация в обратной задаче УНЧ зондирования земной коры. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2009, №1. с.47-52.
9. Gaikovich K.P., Gaikovich P.K., Galkin O.E., Sumin M.I. Dual regularization in one-dimensional inverse scattering problem. Proceedings of 5th International Conference “Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals” (6-10 September, 2010, Sevastopol, Ukraine), Sevastopol: IEEE, ISBN: 978-1-4244-7468-4, pp.90-92.
10. Sumin M. I. 2007, ‘Regularized Dual Method for Nonlinear Mathematical Programming’, *Comput. Math. Math. Phys.* **47**, 760-779.
11. Сумин М.И. Регуляризованный двойственный метод решения нелинейной задачи математического программирования// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. №5. С.794-814.

Получено 16.05.2011