УДК 621.371:526.2+551.526+528.811+551.501

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕЗУЛЬТАТАМ СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ТЕПЛОПЛОПРОВОДНОСТИ В РАДИОТЕРМОМЕТРИИ

К.П.Гайкович

На основе результатов совместного решения уравнений переноса теплового радиоизлучения и температуропроводности развита статистическая теория температурного распределения и теплового радиоизлучения среды (полупространства). Получены соотношения, выражающих ковариационные функции профиля температуры и яркостной температуры через статистические параметры температуры на границе полупространства, которая рассматривается в данном случае как случайная стационарная функция времени. Анализируется специфика регрессионных оценок температуры по тепловому излучению, вытекающая из полученных выражений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ [1-6] была развита теория формирования теплового радиоизлучения среды (полупространства), температурное распределение в которой формируется под влиянием динамики граничных условий - температуры поверхности или теплового потока через поверхность этой среды. На основе совместного решения уравнений переноса теплового излучения и теплопроводности оказалось возможным получить соотношения, выражающие яркостную температуру теплового излучения среды в виде интеграла по времени от этих граничных условий [1-3], а позднее удалось обратить эти уравнения [4-6] и получить соотношения, выражающие граничные условия и распределение (профиль) температуры среды через эволюцию ее яркостной температуры. Таким образом, удалось получить корректное решение задачи одноволнового радиометрического дистанционного зондирования температурного профиля среды.

Эти результаты были использованы в [4-6] для радиометрических исследований суточной тепловой динамики грунта (использовались измерения динамики яркостных температур теплового радиоизлучения грунта на длинах волн 0,8 и 3 см), а также пограничного слоя атмосферы (использовались измерения собственного теплового радиоизлучения атмосферы на длине волны 0,5 см в центре полосы поглощения кислорода).

Однако не всегда возможно и удобно проводить многочасовые измерения динамики теплового излучения для контроля профиля температуры среды. Существуют и применяются также методы восстановления температурного профиля по спектру или угловой зависимости яркостных температур, измеренных в произвольный момент времени. Эти методы связаны с решением некорректного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода для яркостной температуры, которое невозможно без использования априорной информации о свойствах искомой функции, таких как информация о гладкости, дифференцируемости или принадлежности $T(z)$ к компактному классу (методы А.Н.Тихонова) [7-11], либо информации статистического характера [12-14]. Применение статистических методов связано с использованием ковариационных функций и статистических параметров теплового радиоизлучения и температурного профиля. На практике используются эмпирические статистические характеристики, определяемые из результатов измерений. Например, для восстановления профиля температуры атмосферы используются ансамбли аэрозондовых данных, полученных в пунктах метеорологического зондирования[12-14]. При решении задач радиотермометрии пограничного слоя атмосферы и грунта необходимые данные получить трудно, поэтому в этих случаях применялись методы А.Н.Тихонова [7-11]. Однако результаты совместного решения уравнений переноса излучения и теплопроводности могут быть использованы и для теоретического определения необходимых корреляционных функций, если рассматривать граничное условие для температуры как случайную функцию времени.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сначала однородное полупространство $z \le 0$ с постоянными параметрами: коэффициентом температуропроводности a^2 и коэффициентом поглощения теплового радиоизлучения γ. Если задано граничное условие для температуры $T(0,t) = T_0(t)$, то температурное распределение полупространства как функция глубины и времени определяется из уравнения теплопроводности :

$$T(z,t) = \int_{-\infty}^{t} T_0(\tau) \frac{-z}{\sqrt{4\pi a^2 (t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau . \quad (1)$$

Яркостная температура восходящего теплового излучения на длине волны λ определяется из уравнения переноса излучения :

$$T_{я}(t) = \int_{-\infty}^{0} T(z)\, \gamma(\lambda)\, e^{\gamma(\lambda) z}\, dz , \quad (2)$$

где предполагается для простоты, что коэффициент отражения полупространства равен нулю.

Совместное решение (1) и (2) позволяет выразить яркостную температуру через граничное условие для температуры:

$$T_{Я}(t) = \int_{-\infty}^{t} T_0(\tau)\Big[\frac{\gamma a}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - (\gamma a)^2 \operatorname{erfc}(\gamma a\sqrt{t-\tau})\, e^{(\gamma a)^2 (t-\tau)}\Big] d\tau . \tag{3}$$

В случае неоднородной среды аналогичное выражение было получено в [6] на основе использования свойств интеграла Дюамеля:

$$T_{Я}(t) = \int_{-\infty}^{t} T_0(\tau) \frac{\partial}{\partial t}\, T^1_{Я}(t-\tau) d\tau \ , \tag{4}$$

где $T^1_{Я}(t-\tau)$ - отклик яркостной температуры на единичный скачок температуры поверхности (граничное условие - функция Хевисайда):

$$T^1(0,t) = 1(t) \ .$$

Решение (3) как уравнения Вольтерра 1-го рода с переменным верхним пределом, полученное в [5,6], имеет вид:

$$T_0(t) = T_{Я}(t) + \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^{t} T'_{Я}(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} =$$

$$= T_{Я}(t) + \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^{t} (T_{Я}(t) - T_{Я}(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)^3}} \ . \tag{5}$$

Подстановка (5) в (1) дает решение задачи радиотермометрии для однородного полупространства [5,6] :

$$T(z,t) = \int_{-\infty}^{t} T_{Я}(\tau)(-z)\, \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\tau}{\sqrt{4\pi a^2 (t-\tau)^3}} +$$

$$+ \frac{1}{\gamma a} \int_{-\infty}^{t} T'_{Я}(\tau)\, \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \ . \tag{6}$$

Интегрируя второе слагаемое в (6) по частям, можно получить формулу для определения профиля температуры по эволюции яркостной температуры среды [5,6] :

$$T(z,t) = \int_{-\infty}^{t} T_{\text{я}}(\tau) e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{z^2}{2a^2(t-\tau)} - 1\right) - z\right] \frac{d\tau}{\sqrt{4\pi a^2 (t-\tau)^3}} . \tag{7}$$

Формула (7) справедлива для всех значений z, кроме $z = 0$, при котором невозможно выполнить интегрирование по частям в (6). Это важное для дальнейшего изложения свойство не было отмечено в предыдущих работах.

Приведенные соотношения позволяют получить еще один весьма интересный результат - формулу, выражающую яркостную температуру на одной длине волны через эволюцию яркостной температуры на другой длине волны. Для этого нужно в формулу (3) для яркостной температуры $T_{\text{я}_2}$ на длине волны λ_2 подставить профиль температуры в виде (6), выраженный через эволюцию яркостной температуры $T_{\text{я}_1}$ на длине волны λ_1. Меняя местами порядок интегрирования и вычисляя в явном виде внутренний интеграл по z, имеем искомую формулу:

$$T_{\text{я}2}(t) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} T_{\text{я}1}(t) + \tag{8}$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} T_{\text{я}_1}(\tau)\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)\left\{\gamma_2 a\left[\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \gamma_2 a\, e^{(\gamma_2 a)^2 (t-\tau)}\, \mathrm{erfc}(\gamma_2 a \sqrt{t-\tau})\right]\right\} d\tau,$$

где γ_1 и γ_2 - коэффициенты поглощения на длинах волн λ_1 и λ_2 соответственно. Интересно отметить, что использование формулы (7) вместо (6) приводит к неверному результату , хотя соотношение (7) несправедливо всего лишь в одной точке $z = 0$, (из-за расходимости в точке $z = 0$ подынтегрального выражения).

При $\gamma_1 = \gamma_2$ из (8) получается очевидный результат $T_{\text{я}_2} = T_{\text{я}_1}$. В случае, когда $\gamma_2 << \gamma_1$ в (8) исчезает первое слагаемое и получается формула, аналогичная соотношению (3), где роль температуры поверхности играет яркостная температура $T_{\text{я}_1}$. Этот результат физически совершенно ясен, поскольку толщина скин-слоя $d_2 = 1/\gamma_2$, в котором формируется тепловое излучение на длине волны λ_2, много больше толщины d_1 на длине волны λ_1, и яркостная температура $T_{я1}$ для яркостной температуры $T_{я2}$ действительно играет роль поверхностной температуры.

Соотношение (8) можно использовать для определения параметров среды по данным одновременных измерений теплового излучения на двух и более длинах волн.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Пусть теперь граничное условие для температуры - случайная стационарная функция с заданным средним значением $\langle T_0\rangle$, среднеквадратичным отклонением σ_{T_0} и автоковариационной функцией $B_{T_0T_0}(\tau) = \langle (T_0(t)-\langle T_0\rangle)(T_0(t+\tau)-\langle T_0\rangle)\rangle$, которая с целью получения наглядных физических результатов будет задаваться экспоненциальной функцией вида

$$B_{T_0T_0}(\tau) = \sigma_{T_0}^2 \exp\left(-\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|\right) \quad , \qquad (9)$$

где τ_0 - время корреляции.

Задачей последующего анализа будет определение корреляционных функций яркостных температур теплового излучения через параметры среды и статистические параметры температуры. Очевидно, что для средних значений имеет место $\langle T(z)\rangle = \langle T_0\rangle$, $\langle T_{я}\rangle = \langle T_0\rangle$, поскольку все приведенные выше интегральные соотношения нормированы на единицу.

Если температура на границе полупространства - случайная функция, то приведенные выше соотношения, поскольку они являются линейными интегральными выражениями, позволяют развить статистическую теорию случайных составляющих температурного распределения и теплового излучения среды на основе известного подхода в теории стационарных случайных процессов для линейных систем, приводящего к соотношениям Винера-Ли. Приведенные ниже результаты определяют статистические параметры температурного распределения и теплового излучения среды через статистические параметры температуры ее поверхности. Эти формулы легко получаются из приведенных выше выражений путем изменения порядка операций усреднения и интегрирования с заменой переменных $\tau' = t - \tau$ и представлены в форме, которая справедлива как для положительного, так для отрицательного полупространства. Отметим также используемое ниже свойство ковариационных функций $B_{yx}(-\tau)=B_{xy}(\tau)$.

Так, из (1) для ковариационной функции между поверхностной температурой T_0 и температурой $T(z)$ на уровне z следует

$$B_{T_0T}(\tau,z) = \int_0^\infty B_{T_0T_0}(\tau-\tau')\,K(\tau')d\tau' =$$
$$= \int_0^\infty B_{T_0T_0}(\tau-\tau')\frac{|z|}{2\sqrt{\pi}a}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4a^2\tau'}}\frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}}\;, \qquad (10)$$

где $K(\tau')$ - ядро интеграла в (1). Отсюда имеем выражение для дисперсии

$$\sigma_T^2(z) = \int_0^\infty B_{T_0T}(\tau)\,K(\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty B_{T_0T_0}(\tau-\tau')\,K(\tau')\,K(\tau)\,d\tau\,d\tau' =$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty B_{T_0T_0}(\tau-\tau')\frac{z^2}{4\pi a^2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4a^2}(\frac{1}{\tau'}+\frac{1}{\tau})}\frac{d\tau\,d\tau'}{(\tau\tau')^{3/2}}\;, \qquad (11)$$

а также для автоковариационной матрицы температуры на уровне z

$$B_{TT}(\tau,z) = \int_0^\infty B_{T_0T}(\tau'-\tau)\,K(\tau')\,d\tau' = \qquad (12)$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty B_{T_0T_0}(\tau'-\tau''-\tau)\,K(\tau')\,K(\tau'')\,d\tau'\,d\tau'' =$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty B_{T_0T_0}(\tau'-\tau''-\tau)\,\frac{z^2}{4\pi a^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4a^2}(\frac{1}{\tau'}+\frac{1}{\tau''})}\frac{d\tau'\,d\tau''}{(\tau'\tau'')^{3/2}}$$

и для межуровневой ковариационной матрицы между температурой T_1 на уровне z_1 и температурой T_2 на уровне z_2 (T_2 в данном случае играет в ядре интеграла (1) роль поверхностной температуры):

$$B_{T_2T_1}(z_2,z_1,\tau) = \int_0^\infty B_{T_2T_2}(\tau-\tau')\,K(\tau')\,d\tau' = \qquad (13)$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\tau'\,d\tau''\,d\tau'''}{(\tau'\tau''\tau''')^{3/2}}\,.$$

$$\cdot B_{T_0T_0}(\tau' - \tau'' + \tau''' - \tau)\,\frac{z_2^2\,|z_1 - z_2|}{8\pi^{3/2}a^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{z_2^2}{4a^2}\left(\frac{1}{\tau'}+\frac{1}{\tau''}\right)-\frac{(z_1-z_2)^2}{4a^2}\frac{1}{\tau'''}}\,.$$

Для ковариационной функции между поверхностной температурой среды и яркостной температурой ее теплового радиоизлучения справедливо выражение:

$$B_{T_0T_Я}(\tau) = \int_0^\infty B_{T_0T_0}(\tau - \tau')\,K_1(\tau')\,d\tau' = \tag{14}$$

$$= \int_0^\infty B_{T_0T_0}(\tau-\tau')\,\frac{\gamma a}{\sqrt{\pi\tau'}}\,[1-\sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau'}\mathrm{e}^{(\gamma a)^2\tau'}\mathrm{erfc}(\gamma a\sqrt{\tau'})]\,d\tau',$$

где K_1 - ядро интеграла в (3) или в (4). Из (14) следуют соотношения для дисперсии

$$\sigma^2_{T_Я} = \int_0^\infty B_{T_0T_Я}(\tau)\,K_1(\tau)\,d\tau = \tag{15}$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty B_{T_0T_Я}(\tau-\tau')\,K_1(\tau')\,K_1(\tau)\,d\tau\,d\tau' =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty d\tau\,d\tau'\,B_{T_0T_0}(\tau-\tau')\,\frac{(\gamma a)^2}{\pi\sqrt{\tau\tau'}}\cdot$$

$$\cdot[1-\sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau'}\,\mathrm{e}^{(\gamma a)^2\tau'}\mathrm{erfc}(\gamma a\sqrt{\tau'})][1-\sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau}\,\mathrm{e}^{(\gamma a)^2\tau}\mathrm{erfc}(\gamma a\sqrt{\tau})].$$

и автоковариационной функции яркостной температуры

$$B_{T_ЯT_Я}(\tau) = \int_0^\infty\int_0^\infty B_{T_ЯT_0}(\tau-\tau')\,K_1(\tau')\,d\tau' =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty B_{T_0T_0}(\tau'-\tau''-\tau)\,K(\tau')\,K(\tau'')\,d\tau'\,d\tau'' =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty d\tau'\,d\tau''\,B_{T_0T_0}(\tau'-\tau''-\tau)\,\frac{(\gamma a)^2}{\pi\sqrt{\tau'\tau''}}\cdot \tag{16}$$

$$\cdot[1-\sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau'}\mathrm{e}^{(\gamma a)^2\tau'}\mathrm{erfc}\,(\gamma a\sqrt{\tau'})][1-\sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau''}\mathrm{e}^{(\gamma a)^2\tau''}\mathrm{erfc}\,(\gamma a\sqrt{\tau''})]$$

Соотношение (16) можно использовать, чтобы получить выражение для ковариационной матрицы между яркостными температурами $T_{я1}$ и $T_{я2}$ на двух различных длинах волн λ_1 и λ_2 из формулы (8):

$$B_{T_{я_1}T_{я_2}}(\lambda_1,\lambda_2,\tau) = \int_0^\infty B_{T_{я_1}T_{я_1}}(\tau-\tau')\,K_1(\tau')\,d\tau' = \tag{17}$$

$$= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} B_{T_{я_1}T_{я_1}}(\tau) + (1-\frac{\gamma_2}{\gamma_1})\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty B_{T_{я_1}T_{я_1}}(\tau-\tau')\,\frac{\gamma_2 a}{\sqrt{\pi\tau'}}\,[1-\sqrt{\pi}(\gamma_2 a)\sqrt{\tau'}\,\mathrm{e}^{(\gamma_2 a)^2\tau'}\mathrm{erfc}\,(\gamma_2 a\sqrt{\tau'})]\,d\tau',$$

а также, чтобы получить формулу для ковариационной матрицы между яркостной температурой и температурой на уровне z из соотношения (6):

$$B_{T_яT}(\tau,z) = \int_0^\infty B_{T_яT_я}(\tau-\tau')\,\frac{|z|}{2\sqrt{\pi}a}\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4a^2\tau'}}\,\frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} +$$

$$+\frac{1}{\gamma a}\int_0^\infty \frac{\partial B_{T_яT_я}}{\partial\tau'}(\tau-\tau')\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4a^2\tau'}}\,\frac{d\tau'}{\sqrt{\pi}\,(\tau')^{1/2}} \tag{18}$$

4. РЕГРЕССИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ. ОЦЕНКИ ДЛЯ РАДИОТЕРМОМЕТРИИ ГРУНТА И АТМОСФЕРЫ

Полученные соотношения представляют интерес с точки зрения широко используемых статистических методов определения профиля температуры по тепловому радиоизлучению или поверхностной температуре [12-14], поскольку ранее параметры, рассмотренные в предыдущем разделе, определялись только эмпирически на основе статистического анализа измерений. Полученные результаты позволяют вычислять необходимые величины по формулам. Более того, эти формулы проясняют физический смысл величин.

Соотношение (10) легко использовать для регрессионной оценки профиля температуры по поверхностному значению :

$$T(z,t) = \langle T_0\rangle + \frac{B_{T_0T}(\tau,z)}{\sigma_{T_0}^{\;2}}(T_0(t-\tau) - \langle T_0\rangle) \tag{19}$$

Аналогично, профиль температуры можно оценить по значению яркостной температуры среды, используя (14):

$$T(z,t) = \left\langle T_0 \right\rangle + \frac{B_{T_я T}(\tau,z)}{\sigma_{T_я}{}^2}\left(T_я(t-\tau) - \left\langle T_0 \right\rangle\right) \tag{20}$$

или использовать более сложные методы многомерной регрессии или статистической регуляризации [12-14]. Естественно, и другие приведенные выше ковариационные функции можно использовать таким же образом для оценок соответствующих величин. Известно, что погрешность $\sigma_{y/x}$ регрессионной оценки величины y по величине x определяется коэффициентом корреляции $R_{xy} = \dfrac{B_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ между этими величинами и значениями дисперсий величин, т.е. может быть вычислена на основе приведенных выражений:

$$\sigma^2_{y/x} = \sigma^2_y (1 - R^2_{xy}) \quad . \tag{21}$$

Из выражений для функций корреляции видно, что эти функции не симметричны относительно значения $\tau = 0$, и, более того, не достигают в этой точке максимума, т.е. прогноз в будущее не симметричен относительно сдвига времени по отношению к прогнозу в прошлое, а прогноз профиля по текущим значениям приземной или яркостной температуры, который известен в литературе как "оптимальная экстраполяция", на самом деле не является оптимальным. Из (21) можно видеть, что оптимальной является оценка прогнозируемой величины в момент t по значению соответствующего предиктора в момент $(t - \tau_m)$ такой, что для значения τ_m функция $R_{xy}(\tau)$ и, соответственно, $B_{xy}(\tau)$ достигают максимума. Условием , из которого определяется значение τ_m является, естественно, $\dfrac{dB(\tau)}{d\tau} = 0$, и соответствующие уравнения легко получаются из приведенных выражений для ковариационных функций. Конкретно для прогноза температурного профиля каждому значению z будет соответствовать свое значение $\tau_m(z)$ и оптимальная экстраполяция получается при прогнозе по значению поверхностной температуры не в тот же момент времени, а по значению, которое было ранее, причем, очевидно, что величина сдвига времени возрастает с ростом z, т.е. $\tau_m(z)$ - монотонно возрастающая функция. Физически такое свойство регрессионной оценки вполне ясно -

температурное возмущение на поверхности оказывает влияние на температуру более глубоких слоев не мгновенно, а через механизм теплопроводности, с запаздыванием, которое возрастает с ростом глубины.

Можно предположить, что и в эмпирических ковариационных функциях температуры реальной атмосферы, физические условия которой не вполне соответствуют рассматриваемой модели, максимальная корреляция также достигается со значениями приземной температуры в прошлом, особенно, если речь идет о пограничном слое. Очевидно также, что приведенные соотношения позволяют получать статистические оценки как значений рассматриваемой величины в будущем ($\tau > 0$) и в текущем времени ($\tau = 0$), так и значений, которые были в прошлом ($\tau \leq 0$).

Для экспоненциальной ковариационной функции вида (9) из приведенных выше формул могут быть получены некоторые простые аналитические результаты. В частности, из (10) при $\tau \leq 0$ следует

$$B_{T_0T}(\tau) = \int_0^\infty \frac{\sigma_{T_0}^2 |z|}{2\sqrt{\pi}a} e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau} - \frac{|\tau-\tau'|}{\tau_0}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} = \sigma_{T_0}^2 e^{-\frac{|z|}{a\sqrt{\tau_0}} - \left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|}, \tag{22}$$

а для $\tau > 0$

$$B_{T_0T}(\tau) = \frac{\sigma_{T_0}^2 |z|}{2\sqrt{\pi}a} \Big[\int_0^\tau e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau} + \frac{\tau'}{\tau_0}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} + \int_\tau^\infty e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau} - \frac{\tau'}{\tau_0}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} \cdot e^{\frac{\tau}{\tau_0}}\Big]. \tag{22a}$$

В частности,

$$B_{T_0T}(0) = \sigma_{T_0}^2 e^{-\frac{|z|}{a\sqrt{\tau_0}}}. \tag{23}$$

Видно, что существует характерное расстояние корреляции температурного профиля с поверхностным значением $\Lambda = a\sqrt{\tau_0}$, которое может служить одним из определений пограничного слоя атмосферы. Для рассматриваемого случая уравнение для определения величины сдвига времени оптимальной экстраполяции $\tau_m(z)$ имеет вид:

$$\int_{\tau}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4a^2\tau}-\frac{\tau'}{\tau_0}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\tau}{\tau_0}} - \int_{0}^{\tau} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4a^2\tau}+\frac{\tau'}{\tau_0}} \frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{\tau_0}} = 0. \quad (24)$$

Из (14) следует

$$B_{T_0 T_{\text{я}}}(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_{T_0}^2 \gamma a}{\sqrt{\pi\tau'}} [1-\sqrt{\pi}(\gamma a)\sqrt{\tau'}\, \mathrm{e}^{(\gamma a)^2 \tau'} \mathrm{erfc}\,(\gamma a\sqrt{\tau'})]\, \mathrm{e}^{-\frac{|\tau-\tau'|}{\tau_0}} d\tau' . \quad (25)$$

Вычисляя интеграл в (25), имеем при $\tau \le 0$:

$$B_{T_0 T_{\text{я}}}(\tau) = \sigma_{T_0}^2 \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\Gamma}}}{1+\sqrt{\frac{\tau_0}{\Gamma}}} \mathrm{e}^{-\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|} , \quad (26)$$

а при $\tau > 0$

$$B_{T_0 T_{\text{я}}}(\tau) = \sigma_{T_0}^2 \Big\{ \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{\tau_0}} + \quad (26\text{a})$$

$$+\frac{1}{\tau_0}\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \frac{1}{(\gamma a)^2+\frac{1}{\tau_0}} \Big[\gamma a\sqrt{\tau}\; {}_1\mathrm{F}_1(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\tau}{\tau_0}) + \mathrm{e}^{-[(\gamma a)^2+\frac{1}{\tau_0}]\tau} \mathrm{erfc}\,(\gamma a\sqrt{\tau}) - 1\Big] -$$

$$-\frac{1}{\tau_0} e^{\frac{\tau}{\tau_0}} \frac{1}{(\gamma a)^2-\frac{1}{\tau_0}} \Big[\gamma a\sqrt{\tau_0}\, \mathrm{erfc}\,(\frac{\tau}{\tau_0}) - \mathrm{e}^{[(\gamma a)^2-\frac{1}{\tau_0}]\tau} \mathrm{erfc}\,(\gamma a\sqrt{\tau})\Big]\Big\} ,$$

где ${}_1\mathrm{F}_1$ - вырожденная гипергеометрическая функция, $\Gamma = 1/(\gamma a)^2$ - характерный масштаб времени, определяющий прогревание среды на толщину скин-слоя $d = 1/\gamma$. Из (26) следует, что

$$B_{T_0 T_Я}(0) = \sigma^2_{T_0} \frac{\sqrt{\dfrac{\tau_0}{\Gamma}}}{1+\sqrt{\dfrac{\tau_0}{\Gamma}}} . \tag{27}$$

Видно, что корреляция яркостной температуры среды с температурой на ее поверхности определяется отношением времени корреляции поверхностной температуры и времени прогревания на глубину скин-слоя для соответствующей длины волны. При $\tau_0/\Gamma >> 1$ $B_{T_0 T_Я}(0) = \sigma^2_{T_0}$, а при $\tau_0/\Gamma << 1$ $B_{T_0 T_Я}(0) = 0$. Результат совершенно ясен. Если среда успевает нагреваться и охлаждаться на глубину скин-слоя за время корреляции поверхностной температуры, то яркостная температура полностью коррелирована с поверхностной; в противном случае вариации этих величин некоррелированы.

Рассматривая вопрос о возможности применения развитой теории к исследованиям атмосферы и грунта, необходимо отметить следующее. Для случая грунта (особенно однородного) можно ожидать, что случайные составляющие температурного распределения и теплового радиоизлучения, которые накладываются на периодические суточные и сезонные колебания, могут быть в основном правильно описаны этой теорией. В атмосфере же случайная составляющая температурного профиля может формироваться не только под влиянием теплопроводности от поверхности, но и процессами адвекции, выделения скрытой теплоты, переноса и поглощения ИК-излучения. Кроме того, для атмосферы, как правило, не выполнено условие однородности среды и стационарности ее параметров (особенно для коэффициента турбулентной температуропроводности). Однако, в пограничном слое атмосферы для излучения в сильных линиях поглощения, например, в линии кислорода на частоте 60 ГГц, где атмосфера однородна по коэффициенту поглощения, развитая статистическая теория может иногда быть использована, на что указывает успешное применение исходных формул в [5,6]. Можно надеяться также (хотя это, разумеется, подлежит проверке), что вертикальный масштаб корреляции температуры Λ, определяемый выражением (23), сохраняет смысл и для неоднородной и нестационарной по параметрам атмосферы, если вертикальный перенос тепла определяется турбулентной диффузией и если использовать среднее значение коэффициента турбулентной температуропроводности в рассматриваемом слое. Выводы об условиях и границах применимости теории можно получить путем сравнения результатов теоретических расчетов и эмпирических ковариационных функций.

Приведем некоторые оценки для упомянутых сред, основанные на полученных соотношениях.

Время корреляции поверхностной температуры составляет обычно около трех суток, т.е. $\tau_0 \cong 2{,}6 \cdot 10^5$ с (хотя, строго говоря, вариации температуры - это нестационарный процесс, структурная функция которого возрастает и за пределами этого времени). В радиометрических исследованиях динамики температуры грунта и пограничного слоя атмосферы, представленных в [5,6], параметры сред имели следующие значения: для грунта $a^2 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ см^2/с, $d = 1/\gamma \cong \lambda$ (λ - длина волны), параметр времени $\Gamma = 1/(\gamma a)^2$ составлял от 10 мин на $\lambda = 0{,}8$ см до 50 час на $\lambda = 13$ см, характерная глубина корреляции в (20) $\Lambda = = a\sqrt{\tau_0} \cong 16$ см; для атмосферы $a^2 = 7{,}0 \cdot 10^3$ см^2/с, $d =$ $= 3{,}0 \cdot 10^4 \sin\theta$ см (θ - угол места, под которым принимается излучение атмосферы), параметр Γ составлял от 16 мин для угла места измерений 5° до 35 часов для зенитного направления, высота корреляции $\Lambda \cong 430$ м.

В естественных условиях для различных типов грунта рассматриваемые параметры принимают значения в пределах $a^2 = 10^{-3}$ - - 10^{-2} см^2/с, $d = 0{,}1 - 15\lambda$, время Γ соответственно может составлять от долей секунды для водной поверхности в ММ диапазоне до нескольких лет для ледников в ДМ диапазоне, а глубина корреляции может изменяться в пределах $\Lambda = 15 - 60$ см. В атмомфере $a^2 = 10^3 - 10^6$ см^2/с , $d = 3{,}0 \cdot 10^4 \sin\theta$ см (при измерениях на частоте 60 ГГц), характерное время прогревания скин-слоя Γ может меняться от 1 мин на угле места 5° до 10 суток при измерениях в зенит, масштаб корреляции температуры с ее приземным значением (толщина пограничного слоя в рассматриваемом смысле) может принимать значения $\Lambda = 100$ м - 3 км.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получила дальнейшее развитие теория совместного решения уравнения переноса теплового излучения и теплопроводности. Получено соотношение между яркостными температурами среды на двух различных длинах волн. Вероятностный подход к результатам позволил развить статистическую теорию температурного распределения и теплового радиоизлучения среды (полупространства). Выведены соотношения для совместных и автоковариационных функций температурного профиля и яркостных температур теплового радиоизлучения. Используя численные методы, развитую теорию можно будет применить в полном объеме как для теоретических оценок, так и для определения ряда параметров среды и ее теплового излучения по экспериментальным данным. возможность вычисления среднеквадратичных вариаций профиля температуры и яркостных температур по статистическим параметрам температуры поверхности. Интересные результаты могут быть получены путем сравнения статистических оценок профиля температуры с восстановлением на основе универсального метода Тихонова [10-11], что позволит прояснить область применимости теории в различных условиях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект 96-02-16514-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайкович К.П., Резник А.Н. // Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 33. N 11. С. 1343.
2. Гайкович К.П. // Исследование Земли из Космоса, 1990. N 6. С. 71.
3. Gaikovich K.P., Reznik A.N., Troitskii R.V.// 11-th Annual Int. Symp. Geosci. and Remote Sensing (IGARSS-91), Helsinki, University of Technologi, Espoo, Finland, 1991. V. 3. P. 1195.
4. Гайкович К.П. // Изв. вузов. Радиофизика, 1993. Т. 36. N 1. С. 16.
5. Гайкович К.П. // Изв. вузов. Радиофизика, 1993. Т. 36. N 10. С. 912.
6. Gaikovich K.P. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, 1994. V. 32. No. 4. P. 885.
7. Гайкович К.П., Резник А.Н., Троицкий Р.В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1989. Т. 33. N 12. С. 1467.
8. Гайкович К.П., Резник А.Н., Сумин М.И., Троицкий Р.В. // Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1987. Т. 23. N 7. С. 761
9. Гайкович К.П., Сумин М.И., Троицкий Р.В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1988. Т. 31. N 9. С. 1104.
10. Гайкович К.П., Кадыгров Е.Н., Косов А.С., Троицкий А.В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1992. Т. 35. N 2. С. 130.
11. Gaikovich K.P., Gromov V.D., Kadygrov E.N., Kosov A.S., Troitsky A.V. //IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, 1993. V. 31. No. 1. P. 116.
12. Gaikovich K.P., Markina N.N., Naumov A.P., et al. //Int. Journal of Remote Sensing, 1983. V. 4. No.2. P. 419.
13. Westwater E.R., Sweezy W.B., McMillin L.M., Dean C. // J. Climate and Meteorology, 1984. V. 23. No. 5. P. 689.
14. Askne J., Skoog G., Winberg E. // Int. Journal of Remote Sensing, 1985. V. 6. No. 7. P. 1241.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
12 января 1995 г.

STOCHASTIC APPROACH TO RESULTS OF SIMULTANEOUS SOLUTION OF EMISSION TRANSFER AND THERMAL CONDUCTIVITY EQUATIONS

K.P.Gaikovich

On the basis of results of simultaneous solution of thermal emission transfer and thermal conductivity equations the stochastic theory of temperature distribution and thermal radioemission of the medium (half-space) has been developed. Expressions for covariance functions of temperature profile and brightness temperature as functions of statistical parameters of half-space surface temperature, which was considered as a random function of time, have been obtained. The analysis of temperature regression evaluations by thermal emission on the basis of expressions obtained is given.