КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА И ТЕПЛОВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СРЕДЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

К.П.Гайкович

1. Введение

В ряде работ [1-6] была развита теория формирования теплового радиоизлучения среды (полупространства), температурное распределение в которой формируется под влиянием динамики граничных условий - температуры поверхности или теплового потока через поверхность этой среды. На основе совместного решения уравнений переноса теплового излучения и теплопроводности оказалось возможным получить соотношения, выражающие яркостную температуру теплового излучения среды в виде интеграла по времени от этих граничных условий [1-3], а позднее удалось обратить эти уравнения [4-6] и получить соотношения, выражающие граничные условия и распределение (профиль) температуры среды через эволюцию ее яркостной температуры. Таким образом, было получено корректное решение задачи одноволнового радиометрического дистанционного зондирования температурного профиля среды.

Эти результаты были использованы в [4-6] для радиометрических исследований суточной тепловой динамики грунта (использовались измерения динамики яркостных температур теплового радиоизлучения грунта на длинах волн 0,8 и 3 см), а также пограничного слоя атмосферы (использовались измерения собственного теплового радиоизлучения атмосферы на длине волны 0,5 см (60 ГГц) в центре полосы поглощения атмосферного кислорода).

Помимо указанного выше непосредственного применения полученные уравнения стали основой развитой в [7-9] корреляционной теории теплового режима и теплового излучения среды, в которой граничное условие для температуры рассматривалось как случайная функция времени. Линейность исходных соотношений позволила выразить все статистические параметры среды (дисперсии, ковариационные функции) через статистические характеристики температуры на ее поверхности в виде линейных интегральных выражений на основе известного подхода в теории стационарных случайных процессов для линейных систем, приводящего к соотношениям Винера-Ли.

Поскольку полученные выражения представляют собой свертку, представлялось естественным применить в анализе спектральный подход, изложение которого и составляет основное содержание данной работы. В результате удалось получить существенно более простые результаты для статистических параметров в виде однократных интегралов. Для экспоненциального вида ковариационной функции поверхностной температуры ряд результатов удалось получить в явном виде.

2. Постановка задачи

Рассмотрим сначала однородное полупространство (результаты будут представлены в форме, которая справедлива как для $z \geq 0$, так и для $z \leq 0$) с постоянными параметрами: коэффициентом температуропроводности a^2 и коэффициентом поглощения теплового радиоизлучения γ, который может зависеть от длины волны λ. Для последующего анализа потребуются спектральные передаточные функции для двух соотношений. Первое из них определяет температурное распределение полупространства как функцию глубины и времени, если задано граничное условие для температуры $T(0,t) = T_0(t)$:

$$T(z,t) = \int_0^{\infty} T_0(t - \tau) \frac{|z|}{\sqrt{4\pi a^2 \tau^3}} exp(- \frac{z^2}{4a^2\tau}) d\tau \quad . \tag{1}$$

Второе определяет эволюцию яркостной температуры теплового радиоизлучения среды через то же самое граничное условие [5-6]:

$$T_Я(t) = \int_0^{\infty} T_0(t - \tau) [\frac{\gamma a}{\sqrt{\pi\tau}} - (\gamma a)^2 erfc(\gamma a \sqrt{\tau}) e^{(\gamma a)^2 \tau}] d\tau . \tag{2}$$

Известно, что для свертки $y(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau) h_x(\tau) d\tau$ (для физически реализуемых процессов $h_x(\tau) = 0$ при $\tau < 0$) передаточная функция представляет собой фурье-преобразование от h_x, т.е. $H_x(i\omega) = \int_0^{\infty} h_x(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau$. Из (1) и (2) имеем соответственно:

$$H_T(i\omega) = e^{-\frac{|z|}{a}\sqrt{i\omega}}, \quad H_{T_я}(i\omega) = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{i\omega}{(\gamma a)^2}}}. \qquad (3)$$

Модуль и аргумент передаточных функций (3) определяет амплитуду и фазовый сдвиг в известных соотношениях, следующих из (1), (2) для периодического граничного условия. Квадрат модуля этих функций является основной величиной в последующем корреляционном анализе:

$$\left|H_T(i\omega)\right|^2 = e^{-\frac{|z|}{a}\sqrt{2\omega}}, \qquad \left|H_{T_я}(i\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{2\omega}}{\gamma a}+\frac{\omega}{(\gamma a)^2}}. \qquad (4)$$

3. Вывод формул для статистических параметров

Если граничное условие для температуры - случайная функция с заданным средним значением $\langle T_0\rangle$, среднеквадратичным отклонением σ_{T0} и автоковариационной функцией $B_{T0T0}(\tau) = \langle(T_0(t)-\langle T_0\rangle)(T_0(t+\tau)-\langle T_0\rangle)\rangle$ со спектром мощности $\Phi_{T0T0}(\omega)$, то спектры мощности температуры и теплового излучения определяются как

$$\Phi_{TT}(\omega) = \left|H_T(i\omega)\right|^2 \Phi_{T0T0}(\omega), \quad \Phi_{T_яT_я}(\omega) = \left|H_{T_я}(i\omega)\right|^2 \Phi_{T0T0}(\omega). \qquad (5)$$

Обратное косинус-преобразование Фурье от спектров мощности определяет, как известно, автоковариационные функции, которые для температуры (на произвольном уровне z) и яркостной температуры (на длине волны λ) имеют вид:

$$B_{TT}(\tau,z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{|z|}{a}\sqrt{2\omega}} \cos(\omega\tau)\,\Phi_{T0T0}(\omega)\,d\tau, \qquad (6)$$

$$B_{T_яT_я}(\tau,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\omega\tau)\,\Phi_{T0T0}(\omega)}{1+\frac{\sqrt{2\omega}}{\gamma(\lambda)a}+\frac{\omega}{(\gamma(\lambda)a)^2}}\,d\tau. \qquad (7)$$

Общие выражения, полученные в [7-9] позволяют, используя автоковариационные функции (6-7), определить три основные ковариационные функции: межуровневую ковариационную функцию температуры $B_{T_2T_1}(z_2,z_1,\tau)$, межволновую ковариационную функцию яркостной температуры $B_{T_{я1}T_{я2}}(\lambda_1,\lambda_2,\tau)$ и совместную ковариационную функцию $B_{T_яT}(\tau)$ между яркостной температурой на длине волны λ и температурой на уровне z. Через эти функции можно выразить все статистические параметры теплового режима и излучения рассматриваемой среды. При перестановке параметров ковариационных функций справедливо $B_{yx}(\tau) = B_{xy}(-\tau)$. Для средних значений из единичной нормировки интегральных соотношений следует $\langle T(z)\rangle = \langle T_0\rangle$, $\langle T_я\rangle = \langle T_0\rangle$.

Для ковариационной матрицы температуры имеем [7-9]:

$$B_{T_2T_1}(z_2,z_1,\tau) = \int_0^{\infty} B_{TT}(\tau-\tau', z_2)\,\frac{|z_1-z_2|}{2\sqrt{\pi}a}\,e^{-\frac{(z_1-z_2)^2}{4a^2\tau'}}\,\frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}}\;. \tag{8}$$

Подставляя (6) в (8), меняя порядок интегрирования и вычисляя внутренний интеграл по τ', получаем:

$$B_{T_2T_1}(z_2,z_1,\tau) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{\sqrt{2\omega}}{a}\,\frac{|z_1|+|z_2|}{2}\right)\cos\left(\omega\tau-\frac{\sqrt{2\omega}}{a}\,\frac{|z_1|-|z_2|}{2}\right)\Phi_{T_0T_0}(\omega)\,d\omega\;. \tag{9}$$

Согласно [7-9] для межволновой ковариационной функции справедливо представление:

$$B_{T_{я1}T_{я2}}(\lambda_1,\lambda_2,\tau) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}B_{T_яT_я}(\tau,\lambda_1) + \\ +\left(1-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)\int_0^{\infty} B_{T_яT_я}(\tau-\tau',\lambda_1)\,\frac{\gamma_2 a}{\sqrt{\pi\tau'}}\left[1-\sqrt{\pi\tau'}(\gamma_2 a)\,e^{(\gamma_2 a)^2}\operatorname{erfc}(\gamma_2 a\sqrt{\tau'})\right]d\tau' \tag{10}$$

Подставляем автоковариационную функцию (7) в (10), также, как и выше, меняем пределы интегрирования, берем внутренний интеграл по τ' и имеем:

$$B_{Тя1Тя2}(\lambda_1,\lambda_2,\tau)={}_0\int^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\cos(\omega\tau)\left[1+\frac{\sqrt{2\omega}}{2a}\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right)+\frac{\omega}{a^2\gamma_1\gamma_2}\right]+\sin(\omega\tau)\frac{\sqrt{2\omega}}{2a}\left(\frac{1}{\gamma_2}-\frac{1}{\gamma_1}\right)}{\left(1+\frac{\sqrt{2\omega}}{\gamma_1 a}+\frac{\omega}{(\gamma_1 a)^2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2\omega}}{\gamma_2 a}+\frac{\omega}{(\gamma_2 a)^2}\right)}\Phi_{T_0T_0}(\omega)\,d\omega \qquad (11)$$

И, наконец, из выражения для совместной ковариационной функции [7-9]

$$B_{T_яT}(\lambda,z,\tau)={}_0\int^{\infty}B_{T_яT_я}(\tau-\tau',\lambda)\frac{|z|}{2\sqrt{\pi}a}e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau'}}\frac{d\tau'}{(\tau')^{3/2}}+\frac{1}{\gamma(\lambda)a}{}_0\int^{\infty}\frac{\partial B_{T_яT_я}(\tau-\tau',\lambda)}{\partial\tau'}e^{-\frac{z^2}{4a^2\tau'}}\frac{d\tau'}{(\pi\tau')^{1/2}}, \qquad (12)$$

также подставляя автоковариационную функцию яркостной температуры (7) и выполняя преобразования, аналогичные описанным выше, получаем

$$B_{T_яT}(\lambda,z,\tau)={}_0\int^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\cos\left(\omega\tau-\frac{|z|}{a}\frac{\sqrt{2\omega}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2\omega}}{2\gamma a}\left[\sin\left(\omega\tau-\frac{|z|}{a}\frac{\sqrt{2\omega}}{2}\right)-\cos\left(\omega\tau-\frac{|z|}{a}\frac{\sqrt{2\omega}}{2}\right)\right]}{1+\frac{\sqrt{2\omega}}{\gamma a}+\frac{\omega}{(\gamma a)^2}}e^{-\frac{|z|}{a}\frac{\sqrt{2\omega}}{2}}\Phi_{T_0T_0}(\omega)\,d\omega \qquad (13)$$

Эти соотношения определяют величины дисперсий температуры и яркостной температуры $\sigma_T{}^2(z) = B_{T1T2}(z,z,0)$, $\sigma^2_{T_я}(\lambda) = B_{Тя1Тя2}(\lambda,\lambda,0)$, автоковариационных функций $B_{TT}(z,\tau) = B_{T1T2}(z,z,\tau)$, $B_{ТяТя}(\lambda,\tau) = B_{Тя1Тя2}(\lambda,\lambda,\tau)$ и соответствующих корреляционных функций температуры и теплового излучения $R_{T1T2}(z_1,z_2,\tau) = B_{T1T2}(z_1,z_2,\tau)/(\sigma_T(z_1)\sigma_T(z_2))$, $R_{Тя1Тя2}(\lambda_1,\lambda_2,\tau) = B_{Тя1Тя2}(\lambda_1,\lambda_2,\tau)/(\sigma_{T_я}(\lambda_1)\sigma_{T_я}(\lambda_2))$, $R_{ТяТ}(\tau) = B_{ТяТ}(\tau)/(\sigma_{T_я}(\lambda)\sigma_T(z))$. Если тепловое излучение принимается с направления, составляющего угол места θ с поверхностью среды, то приведенные выше формулы сохраняют силу при замене $\gamma \rightarrow$
$\gamma/\sin(\theta)$ (при необходимости нетрудно учесть также отражение и преломление на границе среды).

Можно заметить, что любую из приведенных выше ковариационных функций можно выразить через характерные временные параметры, введенные в [5-6] - время прогрева среды на толщину скин-слоя $\Gamma = 1/(\gamma a)^2$ (толщина скин-слоя $d = 1/\gamma$) и время прогрева среды на толщину z - $\Gamma_z = z^2/a^2$. Тогда $B_{T1T2}(z_1,z_2,\tau) = B_{T1T2}(\Gamma z_1,\Gamma z_2,\tau)$, $B_{Тя1Тя2}(\lambda_1,\lambda_2,\tau) = B_{Тя1Тя2}(\Gamma_1,\Gamma_2,\tau)$, $B_{ТяТ}(\lambda,z,\tau) = B_{ТяТ}(\Gamma,\Gamma_Z,\tau)$. Кроме того, эти функции должны зависеть по крайней мере от одного временного параметра, характеризующего ковариационную функцию поверхностной температуры.

Для экспоненциального вида этой ковариационной функции

$$B_{\mathrm{T_0T_0}}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\tau/\tau_0), \tag{14}$$

где характерный масштаб времени τ_0 - время корреляции, имеющей спектр

$$\Phi_{\mathrm{T_0T_0}}(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\tau_0[\,\omega^2 + (\frac{1}{\tau_0})^2]}\,, \tag{15}$$

ковариационные функции заменой переменной интегрирования $\omega' = \sqrt{2\omega\tau_0}$ выражаются через три безразмерных параметра каждая (не считая множителя σ^2), что существенно упрощает анализ (в полученных выражениях выполнено обратное переобозначение $\omega'\to\omega$):

$$B_{T_2T_1}(r_{z_2}, r_{z_1}, r_\tau) = \frac{8\sigma^2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{r_{z_1}+r_{z_2}}{2}\omega} \cos\left(\frac{r_\tau^2}{2}\omega^2 - \frac{r_{z_1}-r_{z_2}}{2}\omega\right)\frac{d\omega}{\omega^4+4}\,, \tag{16}$$

$$B_{T_{я1}T_{я2}}(r_1, r_2, r_\tau) = \frac{32\sigma^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\frac{r_1r_2}{2}\omega^2 + \frac{r_1+r_2}{2}\omega + 1]\cos(\frac{r_\tau^2}{2}\omega^2) + \frac{r_2-r_1}{2}\omega\sin(\frac{r_\tau^2}{2}\omega^2)}{(r_1^2\omega^2+2r_1\omega+2)(r_2^2\omega^2+2r_2\omega+2)}\frac{d\omega}{\omega^4+4}\,, \tag{17}$$

$$B_{T_яT}(r, r_z, r_\tau) = \frac{16\sigma^2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{r_z}{2}\omega}\,\frac{\cos\frac{r_\tau^2\omega^2 - r_z\omega}{2} - \frac{1}{2}r\omega[\sin\frac{r_\tau^2\omega^2 - r_z\omega}{2} - \cos\frac{r_\tau^2\omega^2 - r_z\omega}{2}]}{r^2\omega^2+2r\omega+2}\frac{d\omega}{\omega^4+4}\,, \tag{18}$$

где $r_z = \sqrt{\frac{\Gamma_z}{\tau_0}}$, $r = \sqrt{\frac{\Gamma}{\tau_0}}$, $r_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}$. Из (16)-(18) видно, что соответствующие автоковариационные функции определяются двумя безразмерными параметрами, а дисперсии - одним. Для ковариационной функции (14) некоторые статистические характеристики могут быть выражены и в явном виде. В частности,

$$\sigma^2_{T_я} = \sigma^2\left(\frac{4\alpha^2}{\pi}\frac{ln\alpha}{\alpha^4 - 1} + \frac{\alpha^2(\alpha - 1)}{(\alpha^2+1)(\alpha+1)}\right) \quad , \tag{19}$$

$$B_{T_яT_0}(\tau) = \sigma^2\,\frac{\alpha}{1+\alpha}\,e^{-\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|} = \sigma^2\,\frac{\alpha}{1+\alpha}\,e^{-r_\tau} \quad \tau \geq 0 \quad , \tag{20}$$

$$= \sigma^2\Big\{e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} + \frac{1}{\tau_0}e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}\frac{1}{[(\gamma a)^2+\frac{1}{\tau_0}]}[\gamma a\sqrt{\tau_1}F_1(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\tau}{\tau_0}) + e^{-[(\gamma a)^2+\frac{1}{\tau_0}]\tau}erfc(\gamma a\sqrt{\tau}) - 1] -$$

$$- \frac{1}{\tau_0}e^{\frac{\tau}{\tau_0}}\frac{1}{[(\gamma a)^2-\frac{1}{\tau_0}]}[\gamma a\sqrt{\tau_0}erfc(\frac{\tau}{\tau_0}) - e^{[(\gamma a)^2-\frac{1}{\tau_0}]\tau}erfc(\gamma a\sqrt{\tau})]\Big\}\ , \tau<0,$$

$$B_{TT_0}(\tau) = \sigma^2\,e^{-\left|\frac{z}{L}\right| - \frac{\tau}{\tau_0}} = \sigma^2\,e^{-(r_z + r_\tau)}, \quad \tau \geq 0 \quad , \tag{21}$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{\tau_0}{\Gamma}} = 1/r$, $L = a\sqrt{\tau_0}$, T_0 - поверхностная температура. Величина L определяет характерное расстояние проникновения случайных температурных вариаций в толщу среды. Предсталяется весьма интерсным, что максимум корреляции параметров достигается со сдвигом во времени, поскольку ковариационные функции не симметричны относительно $\tau = 0$. В частности, коэффициент корреляции между поверхностной температурой и температурой на некотором уровне достигает максимума при сдвиге предиктора в прошлое на определенное время, которое возрастает с ростом высоты. Как это уже отмечалось в [7-9], физически это обстоятельство связано с тем, что температурные вариации передаются от поверхности в более глубокие слои не мгновенно, а через механизм теплопроводности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект N 96-02-16514.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайкович К.П., Резник А.Н. // Изв. вузов.Радиофизика, 1989, т.33, N 11, с. 1343- 1350.

2. Гайкович К.П. // Исследование Земли из Космоса, 1990, N 6, с. 71-78.

3. Gaikovich K.P.,Reznik A.N.,Troitskii R.V.// 11-th Annual Int. Symp.on Geosci. and Remote Sensing (IGARSS-91), Helsinki, University of Technologi, Espoo, Finland, 1991, v.3, p.1195-1198.

4. Гайкович К.П. // Изв.вузов. Радиофизика, 1993, т.36, N 1, с. 16-24.

5. Гайкович К.П. // Изв.вузов. Радиофизика, 1993, т.36, N 10, с. 912-920.

6. Gaikovich K.P. // IEEE Trans.Geosci.Remote Sensing, 1994, v.32, No.4, p.885-889.

7. Gaikovich K.P. //- Digest of IGARSS'95, Florence, Italy (10-14 July, 1995), v.1, pp. 38-40.

8. Gaikovich K.P. IEEE Trans.Geosci. Remote Sens., vol.34, No.2, pp.582-587, 1996.

9. Гайкович К.П. // Изв.вузов. Радиофизика, 1996, т.39, N 4, с.399-413.

10. Гайкович К.П., Кадыгров Е.Н., Косов А.С., Троицкий А.В. // Изв.вузов.Радиофизика,1992, т.35, N 2, с. 130-136.

11. Troitsky A.V., Gaikovich K.P., Gromov V.D., Kadygrov E.N., Kosov A.S. //IEEE Trans.Geosci. Remote Sensing, 1993, v.31, No.1, p.116-120.

12. Gaikovich K.P.,Markina N.N.,Naumov A.P.,et al. //Int. Journal of Remote Sensing, 1983, v.4, No.2, p.419-431.

13. Westwater E.R., Sweezy W.B., McMillin L.M., Dean C. // J. Climate and Meteorology, 1984, v.23, No.5, p. 689-703.

14. Askne J., Skoog G., Winberg E. // Int. J. Remote Sensing, 1985, v.6, No.7, p.1241-1256.